

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 1.

SYMMETRISCHE UND UNSYMMETRISCHE
LIBRATIONSÄHNLICHE BAHNEN IM PRO-
BLÈME RESTREINT MIT ASYMPTOTISCH-
PERIODISCHEN BAHNEN ALS GRENZ-
BAHNEN

MIT UNTERSTÜTZUNG EINER GROSSEN ANZAHL
MITARBEITER, INSBESONDERE DES HERRN CAND. MAG.
JENS P. MÖLLER

VON

ELIS STRÖMGREN

MIT 6 FIGUREN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1934

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A S.

Unter den vielen existierenden Klassen einfach-periodischer Bahnen im Problème Restreint mit zwei gleich grossen endlichen Massen: Bahnen um eine der endlichen Massen, um beide Massen, um einen der fünf Librationspunkte oder asymptotisch zu Librationspunkten verlaufende Bahnen gibt es vier Sorten von Bahnklassen, die — für beständig oder in einer bestimmten Phase ihrer Entwicklungsgeschichte — einfach geschlossene, in Bezug auf die ξ -Achse symmetrische Kurven um den Librationspunkt L_1 bilden, indem sie die ξ -Achse zweimal zwischen den zwei endlichen Massen senkrecht schneiden.

Die vom Gesichtspunkte der Entwicklungsgeschichte älteste dieser Klassen sind die reinen Librationen um den Librationspunkt L_1 . Die Entwicklung dieser Bahnklasse fängt mit infinitesimalen Bahnen um L_1 an. Wir können die Entwicklung durch das System endlicher Librationen um L_1 bis zur Doppelejektionsbahn in m_1 und m_2 verfolgen¹. Die weitere Entwicklung dieser Klasse bis zum natürlichen Abschluss ist in der Publ. 60 des Kopenhagener Observatoriums² von Herrn JENS P. MÖLLER skizziert worden und wird in einer demnächst erscheinenden Abhandlung näher dargelegt werden.

¹ Publikation des Kopenhagener Observatoriums No. 18 und Astr. Nachrichten 4721.

² Auch Astr. Nachrichten 5574.

Die zweite der betreffenden Bahnklassen ist die in den Publikationen 26¹ und 94² behandelte Klasse n : eine Klasse in Bezug auf die η -Achse unsymmetrischer Bahnen, die ein in sich geschlossenes System bildet und deshalb keine Grenzbahnen besitzt.

Die Bahnklassen, die in der jetzt vorliegenden Abhandlung behandelt werden, können in der folgenden Weise charakterisiert werden.

Zunächst gibt es eine Klasse in bezug auf die η -Achse symmetrischer librationsähnlicher Bahnen, die zwei asymptotisch-periodische Grenzbahnen besitzen, und dann eine Klasse in Bezug auf die η -Achse unsymmetrischer librationsähnlicher Bahnen, die ebenfalls von zwei asymptotisch-periodischen Bahnen begrenzt sind.

Über diese beiden Bahnklassen hat Herr JENS P. MÖLLER in der oben angeführten Publikation No. 60 des Kopenhagener Observatoriums einen vorläufigen Bericht gegeben. Die jetzt vorliegende Arbeit gibt das gesamte Zahlenmaterial, das zur Klarlegung dieser Bahnklassen beschafft wurde. Da die zwei Bahnklassen, die symmetrische und die unsymmetrische, in einander ziemlich verschlungen sind, wird das Material in einem Verzeichnis zusammengestellt. Bei den verschiedenen periodischen Bahnen wird jedes Mal bemerkt, ob sie der einen oder der anderen Klasse angehören.

Die gerechneten periodischen Bahnen der um die η -Achse symmetrischen Klasse sind in Fig. 1 dargestellt, die gerechneten periodischen Bahnen der unsymmetrischen

¹ Astr. Nachr. 4872.

² Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. XII, 11.

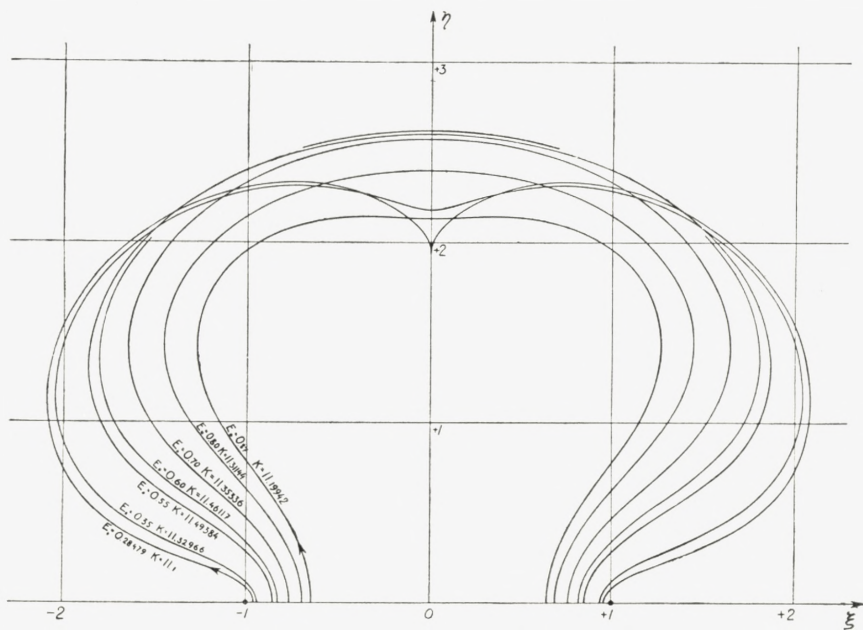


Fig. 1. Die symmetrischen librationsähnlichen Bahnen.

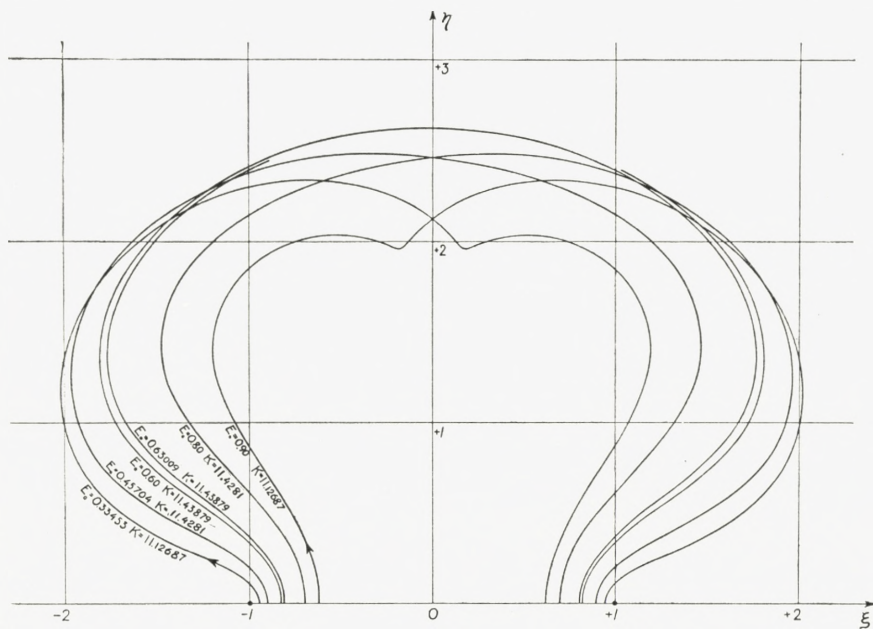


Fig. 2. Die unsymmetrischen librationsähnlichen Bahnen.

Klasse in Fig. 2 (in der entsprechenden Fig. 9 der Publ. 60 ist an zwei Stellen die Zahl 11.31144 in 11.4281 zu korrigieren). In beiden Fällen blieb die Zeichnung auf die oberhalb der ξ -Achse liegende Hälfte beschränkt.

Die Theorie der asymptotischen Bahnen und eine Übersicht über alle existierenden gleichzeitig gegen L_4 und L_5 asymptotischen periodischen Bahnen sind in der Publ. des Kopenhagener Observatoriums No. 47¹ gegeben. Es

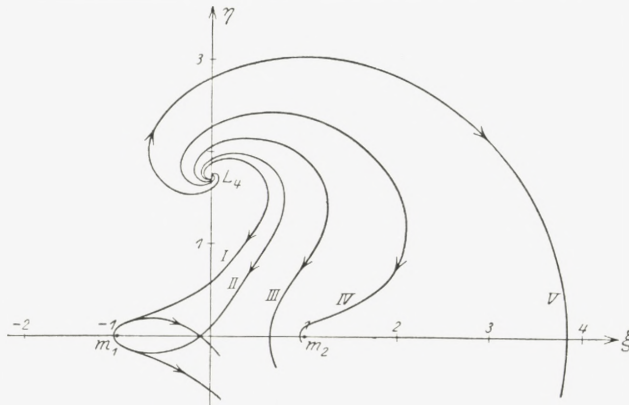


Fig. 3. Die 5 zu L_4 und L_5 asymptotischen periodischen Bahnen. Aus Platzrücksichten wird diese Fig. in kleinerem Massstabe gegeben als die übrigen 5 Bilder der vorliegenden Abhandlung.

zeigte sich, dass es 5 solche periodische Bahnen gibt, die gegen L_4 und L_5 asymptotisch verlaufen. Diese fünf asymptotischen periodischen Bahnen werden nach Publ. 47 in Fig. 3 wiedergegeben. In der Fig. ist nur das für den Überblick notwendige — etwas mehr als ein Quadrant — gegeben; das übrige ist der Übersichtlichkeit wegen fortgelassen.

Nachdem die fundamentalen Resultate der Theorie der asymptotischen Bahnen gefunden waren, stellte es sich

¹ Seeliger-Festschrift (1925). Vgl. auch Publ. 67 (Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. X, 7).

gleich heraus, dass die in Fig. 3 mit I und II bezeichneten Bahnen zusammen die Grenzbahnen und damit den natürlichen Anfang und Abschluss der Bahnen der Klasse k bilden¹ und die Bahn V die Grenzbahn der aus der Unendlichkeit herkommenden Bahnklasse l^2 .

Für die Beurteilung der Bedeutung der Bahnen III und IV in der Fig. 3 hatte man zunächst in dem damals vorliegenden Material keinen Anhalt; es zeigte sich jedoch bald, dass man in diesen zwei asymptotisch-periodischen Bahnen die Grenzbahnen und damit den natürlichen Anfang und Abschluss einer Bahnklasse vor sich hatte, die inzwischen gefunden worden war: die in der Publ. 60 als »Pseudolibrationen« bezeichneten Bahnen. Von dieser Klasse gibt Fig. 1 eine Anzahl (7) Individuen wieder: die Bahnen 2, 8, 14, 20, 27, 34 und 45 in der Übersicht auf S. 14-15.

Um den Zusammenhang deutlicher zu machen, stellen wir in Fig. 4 die zwei in Fig. 3 angedeuteten asymptotisch-periodischen Bahnen III und IV in ihrem ganzen Verlauf dar. Die in Fig. 1 gegebene Bahn $E_0 = 0.28479$, $K = 11.1$ liegt der Grenzbahn IV in Fig. 1 sehr nahe, die Bahn $E_0 = 0.87$, $K = 11.19942$ der Grenzbahn III ziemlich nahe. Den stetigen Übergang der Bahnen dieser Klasse von der einen Grenzbahn bis zur anderen ersieht man aus der Fig. 1. Die Annäherung an die Grenzbahnen geht nach dem in der Publ. 47 S. 7³ beschriebenen Schema mit ins unendliche wiederholter Bildung von Spitzen und Schleifen vor sich.

¹ Publ. des Kopenhagener Observatoriums No. 47 und 80 (Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. XI, 7).

² Publ. 47 und 69 (Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. X, 9).

³ Vgl. auch: Tre Aartier Celest Mekanik paa Københavns Observatorium S. 44 und die grosse Tafel in dem Artikel: Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem (Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Springer 1925).

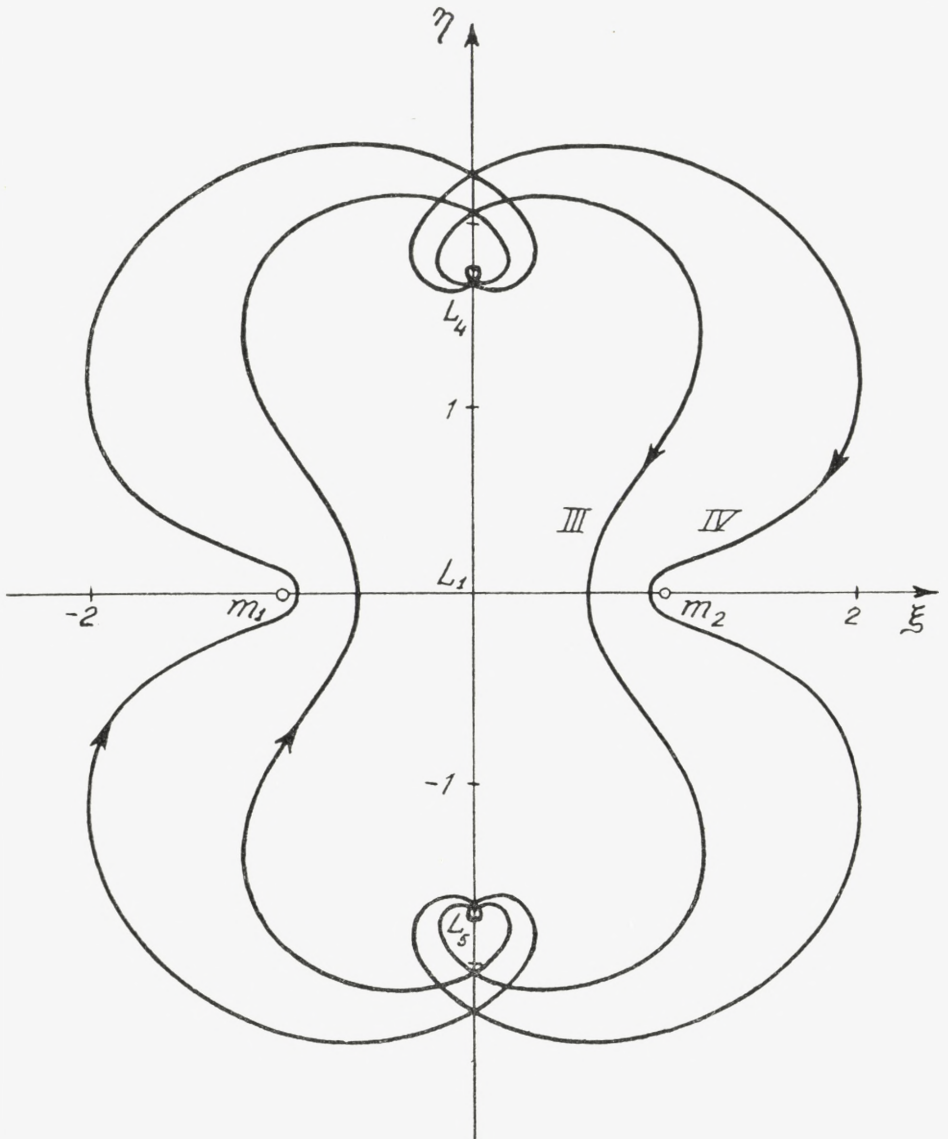


Fig. 4. Die asymptotisch-periodischen Bahnen III und IV der Fig. 3, d. h. die Grenzbahnen der in der Fig. 1 gegebenen symmetrischen librationsähnlichen Bahnen, gezeichnet in ihrem ganzen Verlauf.

Im Laufe der jetzt angedeuteten Untersuchung wurde nun ausserdem eine Klasse in Bezug auf die η -Achse unsymmetrischer periodischer Bahnen gefunden. Die drei

gerechneten Individuen dieser Klasse (die Bahnen 49 und 38 in der Übersicht auf S. 15 und die Bahn $E_0 = 0.63009$, $K = 11.43879$, die das Spiegelbild der Bahn 17 ist) sind, mit ihren Spiegelbildern, in Fig. 2 eingezeichnet. Während die vorhin beschriebene Klasse symmetrischer Bahnen zwei symmetrische asymptotische Bahnen als Grenzbahnen hat, ist die neue auf Fig. 2 dargestellte Klasse von zwei unsymmetrischen asymptotischen Bahnen begrenzt, von denen die eine aus der linken Hälfte der Bahn III und der rechten Hälfte der Bahn IV (Fig. 3) und die andere aus der linken Hälfte der Bahn IV und der rechten Hälfte der Bahn III gebildet ist. Diese zwei Grenzbahnen werden in den Fig. 5 und 6 gegeben.

In der Publ. 67 des Kopenhagener Observatoriums¹ habe ich die durchgreifende Wandlung besprochen, die in unserem Arbeitsprogramm dadurch eingetreten ist, dass das System zu L_4 und L_5 asymptotischer Bahnen gefunden wurde. Bezeichnend für die Kopenhagener Untersuchungen im Gebiete des problême restreint war es in der ersten Periode, dass wir zunächst eine Anzahl Vertreter einer Klasse periodischer Bahnen gefunden hatten, und dass wir nachher durch mühevolleres Suchen die Grenzbahnen der Klasse ermittelten. Nachdem das System zu L_4 und L_5 asymptotischer Bahnen gefunden war, lag gerade das umgekehrte Problem vor: wir haben eine Anzahl asymptotischer periodischer Bahnen gefunden, von denen wir mit Sicherheit behaupten können, dass sie Grenzbahnen

¹ Kgl, Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. X, 7.

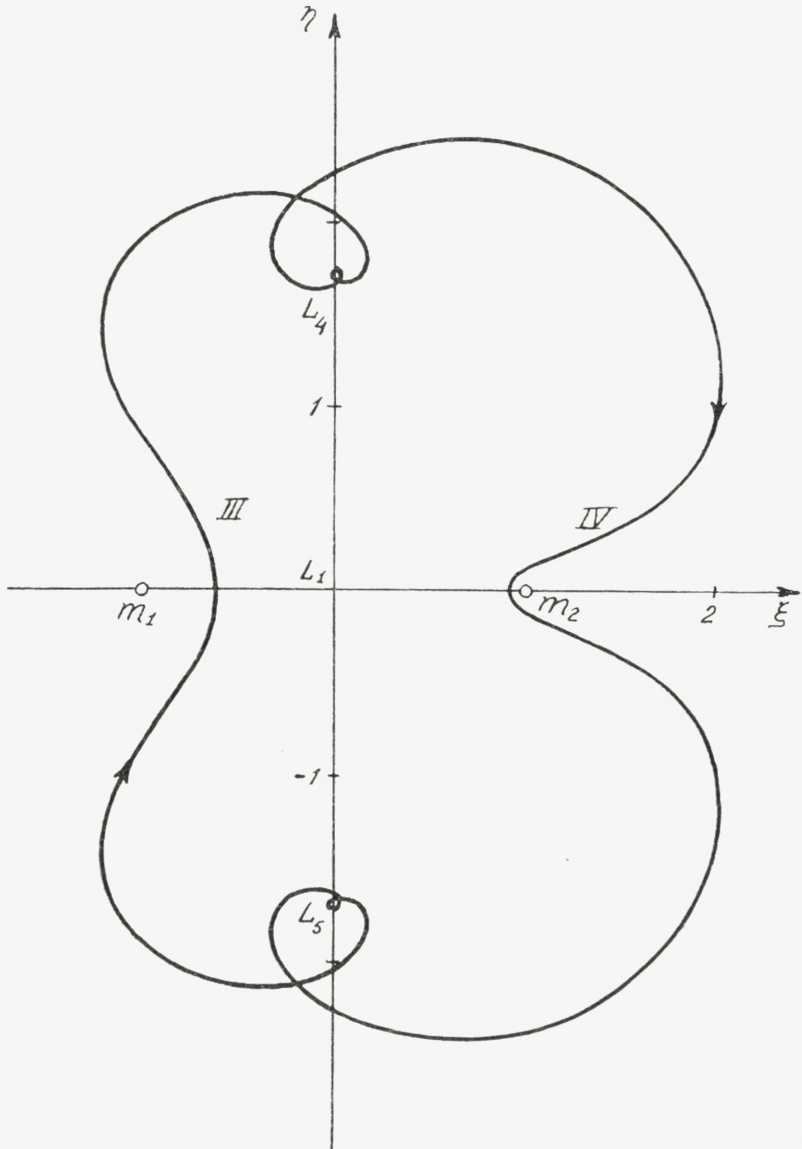


Fig. 5. Die eine Grenzbahn der in der Fig. 2 gezeichneten unsymmetrischen librationsähnlichen Bahnen, bestehend aus der linken Hälfte der Bahn III und der rechten Hälfte der Bahn IV in Fig. 4.

zu Klassen periodischer Bahnen sind, und die Aufgabe ist nun, zu untersuchen, wie diese Klassen verlaufen. Diese Aufgabe ist prinzipiell verhältnismässig einfach, weil der

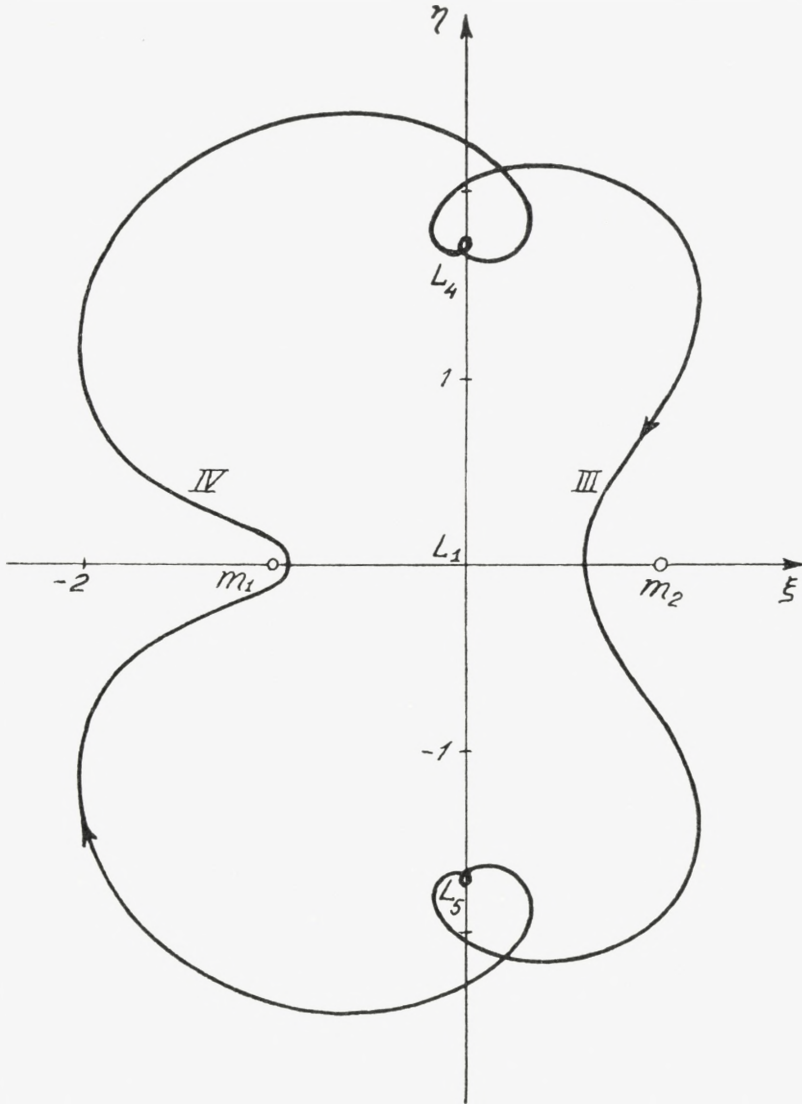


Fig. 6. Die andere Grenzbahn der unsymmetrischen librationsähnlichen Bahnen, bestehend aus der linken Hälfte der Bahn IV und der rechten Hälfte der Bahn III in Fig. 4.

ganze Rahmen des zu untersuchenden Bahngebietes durch die Festlegung der Grenzbahnen gegeben ist.

Wir hatten nun oben mit einer Bahnklasse zu tun, die von den in Fig. 5 und 6 gezeichneten asymptotisch-perio-

dischen Bahnen begrenzt ist. Diese Grenzbahnen sind durch Kombination der asymptotisch-periodischen Bahnen III und IV der Fig. 3 entstanden. Der Gedanke liegt nun nahe, alle übrigen Kombinationen der fünf asymptotisch-periodischen Bahnen der Fig. 3 in entsprechender Weise zu konstruieren. Wenn dies getan wird, erhalten wir, ausser der in Fig. 5 (mit dem Spiegelbild in Fig. 6) dargestellten, noch 9 andere — im ganzen also 10 — unsymmetrische asymptotisch-periodische Bahnen (mit deren Spiegelbildern zusammen 20 solche Bahnen), die neue weite Perspektiven eröffnen, da es anzunehmen ist, dass alle diese Bahnen Grenzbahnen zu Klassen unsymmetrischer periodischer Bahnen sind. Prinzipiell werden sich keine Schwierigkeiten bieten, wenn man das ganze Feld dieser Klassen festlegen will; in der Praxis liesse sich diese Aufgabe jedoch nur mit einem sehr grossen Arbeitsaufwand durchführen.

Bei der Organisation der Arbeit hat Cand. mag. JENS P. MÖLLER wesentliche Dienste geleistet. An der numerischen Rechenarbeit haben teilgenommen: Oberlehrer N. BENNEDSEN (Helsingör), Dr. F. BURMEISTER (München), Geodätassistent JENS JOHANNSEN (Kopenhagen), Admiral M. RIMSKY-KORSAKOFF (Kopenhagen), Berechner M. LÖKKEGAARD (Kopenhagen), Frh. E. MACKEPRANG (Kopenhagen), Cand. mag. AXEL V. NIELSEN (Aarhus), Dr. E. NOTEBOOM (Rathenow) und Oberlehrer P. J. PEDERSEN (Helsingör). Eine Anzahl Umrechnungen von E , F in ξ , η sind von Oberlehrer N. BENNEDSEN (Helsingör), Cand. mag. K. STEENBERG SÖRENSEN (Kopenhagen), Frh. E. MACKEPRANG (Kopenhagen) und Frau G. SKADE (Kopenhagen) ausgeführt worden.

Die Herren Cand. mag. JENS P. MÖLLER, Ingenieur
O. S. L. CHRISTENSEN und Magister B. SVANHOF (alle Kopen-
hagen) haben die Figuren gezeichnet.

Dem Carlsbergfond bin ich für pekuniäre Unterstützung
zu grossem Danke verpflichtet.

Observatorium Kopenhagen, 2. Nov. 1934.

ELIS STRÖMGREN.

Übersicht über die gerechneten Bahnen.

$$E'_0 = 0, F_0 = 0 \quad (\xi'_0 = 0, \eta_0 = 0).$$

1.	$E_0 = +0.28$	$K = 11.1$
2.	+0.28479	11.1 periodisch, symmetrisch
3.	+0.285	11.1
4.	+0.29	11.1
5.	+0.30	11.1
6.	+0.32	11.1
<hr/>		
7.	+0.35	11.3
8.	+0.35	11.32966 periodisch, symmetrisch
9.	+0.35	11.4
<hr/>		
10.	+0.45	11.6
<hr/>		
11.	+0.55	11.0
12.	+0.55	11.2
13.	+0.55	11.4
14.	+0.55	11.49384 periodisch, symmetrisch
15.	+0.55	11.6
<hr/>		
16.	+0.6	11.4
17.	+0.6	11.43879 periodisch, unsymmetrisch
18.	+0.6	11.44
19.	+0.6	11.45
20.	+0.6	11.46117 periodisch, symmetrisch
21.	+0.6	11.48
<hr/>		

22.	$E_0 = +0.7$	$K = 10.0$
23.	+0.7	10.1
24.	+0.7	10.4232 periodisch, Libration um L_1
25.	+0.7	10.9
26.	+0.7	11.2
27.	+0.7	11.35336 periodisch, symmetrisch
28.	+0.7	11.4
<hr/>		
29.	+0.8	9.7
30.	+0.8	9.9
31.	+0.8	10.0
32.	+0.8	10.5
33.	+0.8	11.3
34.	+0.8	11.31144 periodisch, symmetrisch
35.	+0.8	11.4
36.	+0.8	11.42
37.	+0.8	11.428
38.	+0.8	11.4281 periodisch, unsymmetrisch
39.	+0.8	11.5
40.	+0.8	12.0
<hr/>		
41.	$\xi_0 = +0.67$	11.2
42.	+0.67	11.35
43.	+0.67	11.4
		} $E_0 = +0.83659$
<hr/>		
44.	$E_0 = +0.87$	11.1
45.	+0.87	11.19942 periodisch, symmetrisch
46.	+0.87	11.2
<hr/>		
47.	+0.9	10.9
48.	+0.9	11.1
49.	+0.9	11.12687 periodisch, unsymmetrisch
50.	+0.9	11.2
51.	+0.9	11.24

Bahn 1.

$$E_0 = + 0.28, F_0 = 0, K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.28000	0.00000	+ 0.9610 ·	0.0000
0.04	0.27832 ·	+ 0.15598	0.9732 ·	— 0.0430
0.08	0.27362	0.31143	1.0099	0.0855
0.12	0.26685 ·	0.46575	1.0711	0.1273
0.16	0.25969	0.61813	1.1571	0.1690
0.20	0.25457 ·	0.76754	1.2671	0.2128
0.24	0.25470 ·	0.91256 ·	1.3994	0.2632
0.28	0.26403 ·	1.05142 ·	1.5500	0.3278
0.32	0.28703	1.18189	1.7106	0.4181 ·
0.36	0.32820 ·	1.30139	1.8679	0.5483 ·
0.40	0.39131 ·	1.40712 ·	2.0009	0.7321 ·
0.44	0.47833	1.49634 ·	2.0815	0.9761
0.48	0.58835	1.56671 ·	2.0795	1.2715
0.52	0.71697	1.61664	1.9730	1.5894
0.56	0.85661	1.64571	1.7612	1.8860
0.60	0.99758	1.65496 ·	1.4708	2.1179
0.64	1.13038	1.64698 ·	1.1476	2.2608
0.68	1.24751 ·	1.62561 ·	0.8396	2.3158
0.72	1.34458	1.59530 ·	0.5756	2.3033
0.76	1.42024	1.56045	0.3728	2.2497
0.80	1.47553 ·	1.52488 ·	0.2288 ·	2.1785
0.84	1.51294 ·	1.49166 ·	0.1350	2.1062
0.88	1.53564 ·	1.46311	0.0799 ·	2.0426
0.92	+ 1.54705 ·	+ 1.44085 ·	+ 0.0529 ·	— 1.9932

ψ	E	F	ξ	η
0.96	+ 1.55055	+ 1.42605	+ 0.0445 ·	— 1.9605
1.00	1.54947 ·	1.41942	0.0466 ·	1.9460
1.04	1.54707 ·	1.42136 ·	0.0520	1.9502
1.08	1.54664 ·	1.43198	0.0534	1.9735
1.12	1.55160	1.45106	0.0432	2.0163
1.16	1.56560 ·	1.47804	+ 0.0120	2.0780
1.20	1.59256 ·	1.51194 ·	— 0.0517 ·	2.1570
1.24	+ 1.63662	+ 1.55116	— 0.1625 ·	— 2.2476

Bahn 2.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.28479, F_0 = 0, K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.28479	0.00000	+ 0.95972	0.00000
0.04	0.28309 ·	+ 0.15584 ·	0.97187	— 0.04371
0.08	0.27833	0.31116	1.00844	0.08688
0.12	0.27146	0.46535 ·	1.06959	0.12933
0.16	0.26416 ·	0.61762	1.15535	0.17171
0.20	0.25885	0.76692	1.26519	0.21612
0.24	0.25872 ·	0.91185 ·	1.39726	0.26699
0.28	0.26773 ·	1.05065 ·	1.54744	0.33198
0.32	0.29034	1.18111 ·	1.70786	0.42242
0.36	0.33105 ·	1.30067	1.86497	0.55247
0.40	0.39367	1.40655 ·	1.99794	0.73586
0.44	0.48020	1.49604 ·	2.07890	0.97935
0.48	0.58983 ·	1.56680 ·	2.07760	1.27447
0.52	0.71828 ·	1.61726	1.97181	1.59286
0.56	0.85803	1.64698	1.76034	1.89089
0.60	0.99955	1.65696	1.46904	2.12519
0.64	1.13333 ·	1.64975	1.14335	2.27073
0.68	1.25186 ·	1.62910 ·	0.83019	2.32797
0.72	+ 1.35066	+ 1.59944	+ 0.56254	— 2.31682

ψ	E	F	ξ	η
0.76	+ 1.42833	+ 1.56506	+ 0.35440	- 2.26377
0.80	1.48581	1.52978	0.20513	2.19236
0.84	1.52554	1.49658	0.10608	2.11907
0.88	1.55062	1.46771	0.04607	2.05401
0.92	1.56440	1.44475	0.01431	2.00247
0.96	1.57018	1.42877	+ 0.00136	1.96699
1.00	1.57117	1.42042	- 0.00081	1.94863
1.04	1.57048	1.42003	+ 0.00069	1.94777
1.08	1.57118	1.42759	- 0.00084	1.96439
1.12	+ 1.57634	+ 1.44283	- 0.01241	- 1.99800

Bahn 3.

$$E_0 = + 0.285, F_0 = 0, K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.28500	0.00000	+ 0.95966	0.00000
0.04	0.28330	+ 0.15584	0.97182	- 0.04364
0.08	0.27854	0.31115	1.0084	0.08694
0.12	0.27166	0.46533	1.0694	0.12942
0.16	0.26436	0.61759	1.1553	0.17183
0.20	0.25904	0.76689	1.2650	0.21626
0.24	0.25890	0.91182	1.3972	0.26716
0.28	0.26790	1.05062	1.5473	0.33218
0.32	0.29049	1.18108	1.7078	0.42261
0.36	0.33118	1.30064	1.8648	0.55266
0.40	0.39377	1.40653	1.9978	0.73607
0.44	0.48028	1.49603	2.0788	0.97945
0.48	0.58990	1.56681	2.0775	1.2746
0.52	0.71834	1.61729	1.9718	1.5930
0.56	0.85809	1.64703	1.7603	1.8911
0.60	0.99963	1.65705	1.4690	2.1256
0.64	1.13346	1.64987	1.1431	2.2711
0.68	+ 1.25205	+ 1.62926	+ 0.8298	- 2.3285

ψ	E	F	ξ	η
0.72	+ 1.35093 ·	+ 1.59962	+ 0.5619 ·	— 2.3174
0.76	1.42868 ·	1.56527	0.3536	2.2644
0.80	1.48627	1.53000	0.2041	2.1929
0.84	1.52610	1.49679 ·	0.1048	2.1196
0.88	1.55128 ·	1.46792	0.0446	2.0545
0.92	1.56517	1.44492 ·	+ 0.0126	2.0028
0.96	1.57105	1.42889 ·	— 0.0006	1.9672
1.00	1.57213 ·	1.42047	0.0029 ·	1.9487
1.04	1.57152	1.41997	0.0016	1.9476
1.08	1.57226 ·	1.42740	0.0032 ·	1.9639
1.12	+ 1.57743 ·	+ 1.44247	— 0.0148 ·	— 1.9974

Bahn 4.

$$E_0 = + 0.29. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.29000	0.00000	+ 0.95824	0.00000
0.04	0.28828 ·	+ 0.15570	0.97038	— 0.04445
0.08	0.28346	0.31087	1.0068	0.08835
0.12	0.27649	0.46491 ·	1.0676	0.13153
0.16	0.26903 ·	0.61704	1.1534	0.17462
0.20	0.26351	0.76622	1.2630	0.21967
0.24	0.26311	0.91105	1.3948	0.27112
0.28	0.27177	1.04978 ·	1.5446	0.33641
0.32	0.29394	1.18023 ·	1.7048	0.42705
0.36	0.33415 ·	1.29985 ·	1.8617	0.55693
0.40	0.39622	1.40590 ·	1.9947	0.74000
0.44	0.48220 ·	1.49568	2.0761	0.98250
0.48	0.59140	1.56687 ·	2.0755	1.2776
0.52	0.71963 ·	1.61791	1.9734	1.5961
0.56	0.85950	1.64834 ·	1.7596	1.8960
0.60	1.00160	1.65915 ·	1.4673	2.1330
0.64	+ 1.13646	+ 1.65280	+ 1.1389	— 2.2815

ψ	E	F	ξ	η
0.68	+ 1.25653	+ 1.63299	+ 0.82142	— 2.3414
0.72	1.35727	1.60406 ·	0.54822	2.3319
0.76	1.43719 ·	1.57029 ·	0.33408	2.2796
0.80	1.49717 ·	1.53537	0.17892	2.2078
0.84	1.53955 ·	1.50224 ·	0.07363	2.1335
0.88	1.56736 ·	1.47307 ·	+ 0.00788	2.0667
0.92	1.58387 ·	1.44938	— 0.02940	2.0127
0.96	1.59229 ·	1.43214	0.04758	1.9740
1.00	1.59572	1.42191 ·	0.05465	1.9513
1.04	1.59706 ·	1.41893 ·	0.05745	1.9447
1.08	1.59916 ·	1.42311 ·	0.06228	1.9538
1.12	+ 1.60476	+ 1.43410	— 0.07528	— 1.9776

Bahn 5.

$$E_0 = + 0.30. F_0 = 0. K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.30000	0.00000	+ 0.95534	0.00000
0.04	0.29825	+ 0.15540	0.96742	— 0.04585
0.08	0.29331	0.31029	1.0038	0.09116
0.12	0.28614	0.46405	1.0645	0.13573
0.16	0.27839	0.61590 ·	1.1497	0.18017
0.20	0.27246 ·	0.76483 ·	1.2588	0.22651
0.24	0.27154	0.90947	1.3900	0.27898
0.28	0.27952 ·	1.04807	1.5392	0.34509
0.32	0.30087 ·	1.17848	1.6987	0.43588
0.36	0.34012 ·	1.29821 ·	1.8552	0.56541
0.40	0.40114	1.40457	1.9881	0.74741
0.44	0.48608 ·	1.49489	2.0703	0.98915
0.48	0.59441 ·	1.56689	2.0714	1.2833
0.52	0.72222	1.61901	1.9682	1.6031
0.56	0.86231	1.65077 ·	1.7578	1.9057
0.60	+ 1.00547	+ 1.66310 ·	+ 1.4638	— 2.1475

ψ	E	F	ξ	η
0.64	+ 1.14231	+ 1.65832	+ 1.1303	— 2.3013
0.68	1.26524 ·	1.64002	0.80456	2.3658
0.72	1.36958 ·	1.61239 ·	0.52106	2.3592
0.76	1.45369	1.57960	0.29554	2.3075
0.80	1.51822	1.54521 ·	0.12880	2.2347
0.84	1.56537 ·	1.51205	+ 0.01289	2.1577
0.88	1.59805 ·	1.48214 ·	— 0.06309	2.0869
0.92	1.61935	1.45688	0.10981	2.0274
0.96	1.63230	1.43708	0.13664	1.9817
1.00	1.63974 ·	1.42316 ·	0.15127	1.9500
1.04	1.64429 ·	1.41522	0.16010	1.9320
1.08	1.64835	1.41302 ·	0.16857	1.9266
1.12	1.65407	1.41613	0.18149	1.9325
1.16	1.66350	1.42383	0.20338	1.9476
1.20	1.67841 ·	1.43512 ·	0.23836	1.9696
1.24	1.70035 ·	1.44877	0.29023	1.9947
1.28	1.73049 ·	1.46320	0.36187	2.0180
1.32	1.76938 ·	1.47658 ·	0.45438	2.0340
1.36	+ 1.81721	+ 1.48681 ·	— 0.56702	-- 2.0351

Bahn 6.

$$E_0 = + 0.32. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.32000	0.00000	+ 0.94924	0.00000
0.04	0.31818	+ 0.15479	0.96120	— 0.04862
0.08	0.31302 ·	0.30906 ·	0.99722	0.09670
0.12	0.30548 ·	0.46223	1.0574	0.14402
0.16	0.29719	0.61352 ·	1.1419	0.19115
0.20	0.29050	0.76194	1.2499	0.23998
0.24	0.28856	0.90615 ·	1.3799	0.29463
0.28	0.29524 ·	1.04445 ·	1.5274	0.36225
0.32	+ 0.31498 ·	+ 1.17477	+ 1.6859	— 0.45362

ψ	E	F	ξ	η
0.36	+ 0.35232	+ 1.29469 ·	+ 1.8414	— 0.58247
0.40	0.41120	1.40160	1.9744	0.76255
0.44	0.49401	1.49294	2.0579	1.0018
0.48	0.60055	1.56650	2.0619	1.2944
0.52	0.72730	1.62073	1.9622	1.6153
0.56	0.86765 ·	1.65511 ·	1.7538	1.9233
0.60	1.01273	1.67040	1.4569	2.1742
0.64	1.15335 ·	1.66873 ·	1.1137	2.3388
0.68	1.28185 ·	1.65342	0.7716 ·	2.4124
0.72	1.39327	1.62837	0.4672 ·	2.4112
0.76	1.48563	1.59747	0.2186 ·	2.3605
0.80	1.55921 ·	1.56407	+ 0.0289	2.2843
0.84	1.61583 ·	1.53072	— 0.1089	2.2003
0.88	1.65808	1.49920	0.2049	2.1193
0.92	1.68864	1.47061	0.2693 ·	2.0467
0.96	1.71017 ·	1.44552	0.3112	1.9848
1.00	1.72503 ·	1.42408	0.3376 ·	1.9334
1.04	1.73525 ·	1.40616 ·	0.3541	1.8917
1.08	1.74250 ·	1.39141	0.3647 ·	1.8582
1.12	1.74814	1.37928	0.3726	1.8310
1.16	1.75319	1.36912 ·	0.3797	1.8083
1.20	1.75837 ·	1.36020 ·	0.3873	1.7883
1.24	1.76413	1.35172	0.3961	1.7690
1.28	1.77061	1.34283	0.4060	1.7488
1.32	1.77771	1.33273	0.4165	1.7262
1.36	1.78509	1.32064 ·	0.4267	1.6997
1.40	1.79220 ·	1.30589	0.4350 ·	1.6683
1.44	1.79838	1.28789	0.4400 ·	1.6314
1.48	1.80283	1.26624	0.4403	1.5891
1.52	1.80476 ·	1.24069	0.4344	1.5412
1.56	1.80342 ·	1.21120 ·	0.4214	1.4887
1.60	1.79813	1.17791 ·	0.4006 ·	1.4320
1.64	1.78833 ·	1.14115	0.3723	1.3723
1.68	+ 1.77361	+ 1.10139	— 0.3364 ·	— 1.3105

ψ	E	F	ξ	η
1.72	+ 1.75365 ·	+ 1.05925 ·	− 0.2937 ·	− 1.2476
1.76	1.72826 ·	1.01547	0.2448 ·	1.1844
1.80	1.69731	0.97084	0.1904 ·	1.1216
1.84	1.66065 ·	0.92620	0.1310 ·	1.0601
1.88	1.61819	0.88241 ·	− 0.0670 ·	1.0003
1.92	1.56973 ·	0.84036	+ 0.0014 ·	0.9428 ·
1.96	1.51508 ·	0.80091	0.0745	0.8879 ·
2.00	+ 1.45394	+ 0.76489	+ 0.1523 ·	− 0.8359 ·

Bahn 7.

$$E_0 = + 0.35. F_0 = 0. K = 11.3.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.35000	0.00000	+ 0.93938	0.00000
0.04	0.34803 ·	+ 0.15366 ·	0.95115	− 0.05261
0.08	0.34243 ·	0.30678	0.98660	0.10438
0.12	0.33413	0.45871 ·	1.0459	0.15576
0.16	0.32469 ·	0.60866 ·	1.1288	0.20639
0.20	0.31643	0.75559	1.2348	0.25814
0.24	0.31237	0.89814	1.3619	0.31465
0.28	0.31622	1.03460	1.5061	0.38229
0.32	0.33219	1.16290 ·	1.6599	0.47069
0.36	0.36455 ·	1.28068 ·	1.8112	0.59206
0.40	0.41694	1.38542 ·	1.9415	0.75856
0.44	0.49143	1.47469 ·	2.0272	0.97702
0.48	0.58766 ·	1.54647 ·	2.0423	1.2424
0.52	0.70224	1.59947 ·	1.9667	1.5336
0.56	0.82892	1.63348 ·	1.7962	1.8159
0.60	0.95959	1.64956	1.5485	2.0525
0.64	1.08598	1.65008	1.2582	2.2187
0.68	1.20127 ·	1.63851 ·	0.96465	2.3095
0.72	1.30120 ·	1.61891	0.69855	2.3372
0.76	+ 1.38421	+ 1.59529	+ 0.47607	− 2.3225

ψ	E	F	ξ	η
0.80	+ 1.45099 ·	+ 1.57120 ·	+ 0.29999	— 2.2858
0.84	1.50379 ·	1.54948	0.16475	2.2433
0.88	1.54572	1.53214	+ 0.06073	2.2053
0.92	1.58027 ·	1.52045 ·	— 0.02272	2.1778
0.96	1.61106 ·	1.51507 ·	0.09601	2.1632
1.00	+ 1.64164	+ 1.51601 ·	— 0.16895	— 2.1618

Bahn 8.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.35. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.32966.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.35000	0.00000	+ 0.93938	0.00000
0.04	0.34802 ·	+ 0.15364 ·	0.95115	— 0.05261
0.08	0.34240 ·	0.30673 ·	0.98660	0.10461
0.12	0.33406	0.45862	1.04583	0.15570
0.16	0.32457	0.60851	1.12874	0.20626
0.20	0.31623	0.75534	1.23469	0.25789
0.24	0.31206 ·	0.89774 ·	1.36166	0.31418
0.28	0.31577	1.03401	1.50564	0.38147
0.32	0.33153 ·	1.16205	1.65912	0.46931
0.36	0.36358 ·	1.27949 ·	1.80988	0.58976
0.40	0.41548 ·	1.38381	1.94000	0.75470
0.44	0.48925 ·	1.47257 ·	2.02562	0.97075
0.48	0.58443 ·	1.54378	2.04164	1.23277
0.52	0.69756	1.59617	1.96845	1.51961
0.56	0.82233 ·	1.62957	1.80256	1.79729
0.60	0.95068	1.64510 ·	1.56168	2.02986
0.64	1.07438 ·	1.64522 ·	1.28000	2.19355
0.68	1.18673 ·	1.63346	0.99608	2.28374
0.72	1.28356	1.61392 ·	0.73963	2.31284
0.76	1.36344	1.59071 ·	0.52611	2.30137
0.80	+ 1.42715 ·	+ 1.56748	+ 0.35810	— 2.26935

ψ	E	F	ξ	η
0.84	+ 1.47707	+ 1.54713	+ 0.22980	— 2.23270
0.88	1.51645	1.53181	0.13153	2.20195
0.92	1.54902	1.52294	+ 0.05229	2.18335
0.96	1.57873	1.52129	— 0.01903	2.17980
1.00	+ 1.60958	+ 1.52701	— 0.09348	— 2.19190

Bahn 9.

$$E_0 = + 0.35. F_0 = 0. K = 11.4.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.35000	0.00000	+ 0.93938	0.00000
0.04	0.34800	+ 0.15360	0.95115	— 0.05259
0.08	0.34233	0.30662	0.98660	0.10455
0.12	0.33389	0.45841	1.0458	0.15555
0.16	0.32427	0.60814	1.1286	0.20593
0.20	0.31575	0.75474	1.2345	0.25734
0.24	0.31134	0.89681	1.3611	0.31306
0.28	0.31470	1.03261	1.5046	0.37953
0.32	0.32997	1.16003	1.6572	0.46603
0.36	0.36128	1.27667	1.8071	0.58424
0.40	0.41204	1.37998	1.9363	0.74553
0.44	0.48409	1.46755	2.0220	0.95594
0.48	0.57677	1.53739	2.0400	1.2099
0.52	0.68645	1.58832	1.9723	1.4867
0.56	0.80672	1.62028	1.8170	1.7533
0.60	0.92954	1.63454	1.5919	1.9761
0.64	1.04687	1.63370	1.3302	2.1334
0.68	1.15223	1.62146	1.0686	2.2216
0.72	1.24172	1.60210	0.83457	2.2533
0.76	1.31418	1.57988	0.64217	2.2481
0.80	1.37062	1.55864	0.49340	2.2256
0.84	1.41369	1.54155	0.38221	2.2014
0.88	+ 1.44703	+ 1.53104	+ 0.29871	— 2.1864

ψ	E	F	ξ	η
0.92	+ 1.47491	+ 1.52885	+ 0.23119	- 2.1880
0.96	1.50204 ·	1.53603 ·	0.16697	2.2102
1.00	1.53355 ·	1.55307	+ 0.09192	2.2556
1.04	1.57507 ·	1.57973	- 0.01083	2.3238
1.08	1.63268 ·	1.61499	0.16164	2.4099
1.12	+ 1.71276 ·	+ 1.65672	- 0.38435	- 2.5003

Bahn 10.

$$E_0 = + 0.45. F_0 = 0. K = 11.6.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.450000	0.000000	+ 0.90045	0.00000
0.02	0.449424	+ 0.074711	0.90322	- 0.03249
0.04	0.447714	0.149352 ·	0.91150	0.06488
0.06	0.444919 ·	0.223853	0.92538	0.09715
0.08	0.441126 ·	0.298134 ·	0.94474	0.12919
0.10	0.436455 ·	0.372112 ·	0.96972	0.16096
0.12	0.431064	0.445693	1.0003	0.19245
0.14	0.425147 ·	0.518770	1.0363	0.22370
0.16	0.418942	0.591224	1.0779	0.25476
0.18	0.412724	0.662918	1.1248	0.28581
0.20	0.406811	0.733700 ·	1.1769	0.31707
0.22	0.401559 ·	0.803399	1.2338	0.34890
0.24	0.397366	0.871824	1.2953	0.38178
0.26	0.394661	0.938765 ·	1.3606	0.41635
0.28	0.393903 ·	1.003996	1.4293	0.45341
0.30	0.395569 ·	1.067271	1.5007	0.49418
0.32	0.400142 ·	1.128332	1.5722	0.53894
0.34	0.408095	1.186911 ·	1.6440	0.58969
0.36	0.419869 ·	1.242735 ·	1.7138	0.64743
0.38	0.435854 ·	1.295533	1.7798	0.71366
0.40	0.456364 ·	1.345041	1.8397	0.78835
0.42	+ 0.481612	+ 1.391014 ·	+ 1.8912	- 0.87320

ψ	E	F	ξ	η
0.44	+ 0.511686 ·	+ 1.433233 ·	+ 1.9317	— 0.96796
0.46	0.546539 ·	1.471515 ·	1.9587	1.0723
0.48	0.585966	1.505722	1.9701	1.1849
0.50	0.629609	1.535767	1.9642	1.3042
0.52	0.676965	1.561627 ·	1.9395	1.4272
0.54	0.727401	1.583343 ·	1.8958	1.5513
0.56	0.780181 ·	1.601028 ·	1.8338	1.6728
0.58	0.834511 ·	1.614868	1.7548	1.7888
0.60	0.889574	1.625116 ·	1.6613	1.8962
0.62	0.944580	1.632096	1.5561	1.9929
0.64	0.998797 ·	1.636185	1.4427	2.0771
0.66	1.051595 ·	1.637809 ·	1.3244	2.1486
0.68	1.102468 ·	1.637429	1.2044	2.2074
0.70	1.151051 ·	1.635522 ·	1.0854	2.2544
0.72	1.197124 ·	1.632569	0.96960	2.2910
0.74	1.240614	1.629039 ·	0.85838	2.3190
0.76	1.281581	1.625378	0.75252	2.3403
0.78	1.320210 ·	1.621999 ·	0.65224	2.3569
0.80	1.356794 ·	1.619268 ·	0.55721	2.3704
0.82	1.391719 ·	1.617506 ·	0.46658	2.3824
0.84	1.425447 ·	1.616979 ·	0.37921	2.3942
0.86	1.458503 ·	1.617899 ·	0.29363	2.4068
0.88	1.491466 ·	1.620417	0.20814	2.4211
0.90	1.524957 ·	1.624622 ·	0.12082	2.4371
0.92	1.559626 ·	1.630541	+ 0.02961	2.4552
0.94	+ 1.596143	+ 1.638130 ·	— 0.06768	— 2.4748

Bahn 11.

$$E_0 = + 0.55. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.550000	0.000000	+ 0.85252	0.00000
0.02	+ 0.549458	+ 0.072637	+ 0.85504	— 0.03797

ψ	E	F	ξ	η
0.04	+0.547847	+0.145227	+ 0.86266	— 0.07591
0.06	0.545214	0.217723	0.87534	0.11381
0.08	0.541632	0.290070	0.89316	0.15164
0.10	0.537212	0.362199	0.91614	0.18943
0.12	0.532092	0.434064	0.94422	0.22720
0.14	0.526447	0.505572	0.97748	0.26499
0.16	0.520499	0.576643	1.01588	0.30294
0.18	0.514493	0.647169	1.05929	0.34117
0.20	0.508724	0.717033	1.10764	0.37994
0.22	0.503527	0.786103	1.16073	0.41960
0.24	0.499279	0.854232	1.21817	0.46060
0.26	0.496398	0.921255	1.27959	0.50351
0.28	0.495339	0.986991	1.34428	0.54911
0.30	0.496596	1.051246	1.41143	0.59834
0.32	0.500680	1.113812	1.48003	0.65226
0.34	0.508122	1.174471	1.54879	0.71217
0.36	0.519458	1.232997	1.61593	0.77938
0.38	0.535206	1.289147	1.67954	0.85532
0.40	0.555852	1.342732	1.73740	0.94144
0.42	0.581826	1.393495	1.78667	1.03883
0.44	0.613485	1.441235	1.82437	1.14834
0.46	0.651084	1.485757	1.84726	1.27026
0.48	0.694762	1.526892	1.85174	1.40419
0.50	0.744525	1.564487	1.83462	1.54871
0.52	0.800233	1.598424	1.79271	1.70158
0.54	0.861601	1.628609	1.72344	1.85948
0.56	0.928198	1.654987	1.62530	2.01809
0.58	0.999466	1.677526	1.49765	2.17255
0.60	1.074737	1.696234	1.34144	2.31739
0.62	1.153253	1.711149	1.15903	2.44733
0.64	1.234211	1.722329	0.95385	2.55741
0.66	1.316777	1.729871	0.73092	2.64369
0.68	1.400124	1.733879	0.49587	2.70312
0.70	+1.483453	+1.734476	+ 0.25480	— 2.73425

ψ	E	F	ξ	η
0.72	+ 1.566000	+ 1.731777	+ 0.01398	— 2.73687
0.74	1.647069	1.725902	— 0.22081	2.71194
0.76	1.726015	1.716953	0.44424	2.66159
0.78	1.802252	1.705018	0.65186	2.58894
0.80	1.875256	1.690172	0.84012	2.49759
0.82	1.944558	1.672460	1.00645	2.39133
0.84	2.009749	1.651926	1.14932	2.27447
0.86	2.070476	1.628596	1.26806	2.15065
0.88	2.126454	1.602481	1.36273	2.02362
0.90	2.177457	1.573619	1.43427	1.89648
0.92	2.223333	1.542035	1.48403	1.77192
0.94	2.264006	1.507779	1.51386	1.65192
0.96	2.299475	1.470876	1.52582	1.53807
0.98	2.329816	1.431424	1.52217	1.43133
1.00	2.355177	1.389503	1.50536	1.33203
1.02	2.375772	1.345216	1.47752	1.24020
1.04	2.391868	1.298685	1.44087	1.15561
1.06	2.403788	1.250044	1.39739	1.07760
1.08	2.411884	1.199439	1.34903	1.00560
1.10	2.416541	1.147025	1.29724	0.93880
1.12	2.418151	1.092959	1.24357	0.87640
1.14	2.417113	1.037405	1.18927	0.81766
1.16	2.413820	0.980521	1.13526	0.76190
1.18	2.408654	0.922465	1.08252	0.70853
1.20	2.401976	0.863386	1.03160	0.65699
1.22	2.394124	0.803427	0.98312	0.60683
1.24	2.385407	0.742719	0.93752	0.55779
1.26	2.376111	0.681385	0.89502	0.50951
1.28	2.366386	0.619534	0.85582	0.46186
1.30	2.356656	0.557267	0.82014	0.41457
1.32	2.347007	0.494671	0.78804	0.36756
1.34	2.337635	0.431823	0.75956	0.32071
1.36	2.328651	0.368791	0.73463	0.27398
1.38	+ 2.320182	+ 0.305634	— 0.71325	— 0.22725

ψ	E	F	ξ	η
1.40	+ 2.312323 ·	+ 0.242400 ·	— 0.69535	— 0.18051
1.42	2.305152	0.179137	0.68088	0.13368
1.44	2.298692	0.115878 ·	0.66977	0.08671
1.46	2.293004	+ 0.052665 ·	0.66196	— 0.03954
1.48	2.288092 ·	— 0.010470	0.65739	+ 0.00789
1.50	2.283952 ·	0.073494 ·	0.65600	0.05563
1.52	2.280563	0.136371 ·	0.65772	0.10376
1.54	2.277883	0.199064 ·	0.66253	0.15234
1.56	2.275861	0.261529 ·	0.67038	0.20145
1.58	2.274428	0.323716	0.68118	0.25117
1.60	2.273475	0.385567 ·	0.69490	0.30158
1.62	2.272901	0.447011 ·	0.71143	0.35277
1.64	2.272578 ·	0.507972	0.73068	0.40484
1.66	2.272359 ·	0.568354	0.75250	0.45788
1.68	2.272073	0.628049 ·	0.77668	0.51203
1.70	2.271538	0.686936	0.80297	0.56735
1.72	2.270550	0.744873	0.83112	0.62400
1.74	2.268891	0.801704	0.86062	0.68210
1.76	2.266329 ·	0.857256	0.89104	0.74175
1.78	2.262625 ·	0.911341	0.92174	0.80306
1.80	2.257539 ·	0.963751 ·	0.95196	0.86614
1.82	2.250833	1.014274	0.98098	0.93102
1.84	2.242286 ·	1.062677 ·	1.00779	0.99760
1.86	2.231697 ·	1.108733	1.03138	1.06595
1.88	2.218911	1.152201 ·	1.05073	1.13574
1.90	2.203811 ·	1.192851	1.06478	1.20658
1.92	2.186347	1.230463	1.07254	1.27803
1.94	2.166532	1.264828	1.07307	1.34928
1.96	2.144469	1.295769	1.06576	1.41948
1.98	2.120337 ·	1.323122	1.05017	1.48759
2.00	2.094402	1.346797	1.02631	1.55236
2.02	2.067008	1.366716	0.99442	1.61258
2.04	2.038570	1.382859	0.95526	1.66704
2.06	+ 2.009557	— 1.395262 ·	— 0.90992	+ 1.71476

ψ	E	F	ξ	η
2.08	+ 1.980473	- 1.404011	- 0.85978	+ 1.75468
2.10	1.951846	1.409247	0.80650	1.78629
2.12	1.924187	1.411160	0.75180	1.80925
2.14	1.897994	1.409985	0.69742	1.82370
2.16	1.873716	1.405998	0.64504	1.83000
2.18	1.851750	1.399502	0.59613	1.82865
2.20	1.832432	1.390823	0.55186	1.82050
2.22	1.816023	1.380313	0.51318	1.80658
2.24	1.802737	1.368310	0.48080	1.78788
2.26	1.792671	1.355169	0.45500	1.76540
2.28	1.785933	1.341232	0.43606	1.74008
2.30	1.782532	1.326840	0.42395	1.71277
2.32	1.782444	1.312314	0.41846	1.68435
2.34	1.785602	1.297963	0.41938	1.65542
2.36	1.791919	1.284083	0.42639	1.62663
2.38	1.801276	1.270952	0.43916	1.59841
2.40	+ 1.813536	- 1.258835	- 0.45733	+ 1.57086

Bahn 12.

$$E_0 = + 0.55. F_0 = 0. K = 11.2.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.550000	0.000000	+ 0.85252	0.00000
0.02	0.549441	+ 0.072487	0.85504	- 0.03789
0.04	0.547773	0.144921	0.86268	0.07574
0.06	0.545045	0.217249	0.87536	0.11352
0.08	0.541330	0.289413	0.89316	0.15122
0.10	0.536737	0.361347	0.91610	0.18882
0.12	0.531403	0.432978	0.94417	0.22633
0.14	0.525505	0.504223	0.97740	0.26380
0.16	0.519253	0.574986	1.01571	0.30131
0.18	+ 0.512895	+ 0.645158	+ 1.05902	- 0.33901

ψ	E	F	ξ	η
0.20	+ 0.506719	+ 0.714615	+ 1.10723	— 0.37709
0.22	0.501054	0.783219	1.16014	0.41589
0.24	0.496267	0.850814	1.21731	0.45579
0.26	0.492764	0.917228	1.27835	0.49736
0.28	0.490984	0.982275	1.34261	0.54130
0.30	0.491397	1.045753	1.40935	0.58844
0.32	0.494492	1.107449	1.47745	0.63980
0.34	0.500768	1.167140	1.54568	0.69650
0.36	0.510723	1.224598	1.61246	0.75983
0.38	0.524828	1.279592	1.67600	0.83102
0.40	0.543518	1.331897	1.73412	0.91128
0.42	0.567164	1.381295	1.78436	1.00164
0.44	0.596058	1.427587	1.82417	1.10277
0.46	0.630389	1.470593	1.85054	1.21486
0.48	0.670223	1.510163	1.86058	1.33755
0.50	0.715507	1.546176	1.85165	1.46957
0.52	0.766042	1.578551	1.82117	1.60896
0.54	0.821504	1.607247	1.76738	1.75304
0.56	0.881441	1.632264	1.68900	1.89827
0.58	0.945300	1.653644	1.58596	2.04071
0.60	1.012450	1.671473	1.45900	2.17630
0.62	1.082209	1.685878	1.31015	2.30105
0.64	1.153876	1.697014	1.14213	2.41133
0.66	1.226769	1.705068	0.95847	2.50417
0.68	1.300242	1.710241	0.76318	2.57747
0.70	1.373708	1.712741	0.56047	2.62994
0.72	1.446650	1.712767	0.35444	2.66141
0.74	1.518625	1.710502	+ 0.14895	2.67177
0.76	1.589255	1.706098	— 0.05250	2.66250
0.78	1.658221	1.699671	0.24687	2.63462
0.80	1.725247	1.691299	0.43157	2.58994
0.82	1.790084	1.681019	0.60445	2.53040
0.84	1.852504	1.668829	0.76373	2.45788
0.86	+ 1.912279	+ 1.654697	— 0.90796	— 2.37467

ψ	E	F	ξ	η
0.88	+ 1.969186	+ 1.638562	— 1.03619	— 2.28274
0.90	2.023002	1.620350	1.14758	2.18445
0.92	2.073504	1.599976	1.24180	2.08162
0.94	2.120481	1.577356	1.31875	1.97636
0.96	2.163738	1.552415	1.37874	1.87057
0.98	2.203108	1.525087	1.42230	1.76576
1.00	2.238464	1.495328	1.45037	1.66346
1.02	2.269721	1.463116	1.46403	1.56470
1.04	2.296851	1.428451	1.46457	1.47038
1.06	2.319882	1.391361	1.45355	1.38103
1.08	2.338899	1.351899	1.43248	1.29679
1.10	2.354042	1.310137	1.40287	1.21772
1.12	2.365504	1.266175	1.36634	1.14368
1.14	2.373520	1.220127	1.32442	1.07422
1.16	2.378361	1.172124	1.27850	1.00895
1.18	2.380329	1.122307	1.22983	0.94728
1.20	2.379738	1.070827	1.17957	0.88870
1.22	2.376914	1.017837	1.12882	0.83278
1.24	2.372183	0.963492	1.07835	0.77902
1.26	2.365862	0.907944	1.02898	0.72680
1.28	2.358258	0.851343	0.98122	0.67600
1.30	2.349660	0.793829	0.93568	0.62621
1.32	2.340334	0.735535	0.89268	0.57721
1.34	2.330526	0.676585	0.85246	0.52882
1.36	2.320458	0.617090	0.81530	0.48088
1.38	2.310324	0.557154	0.78127	0.43324
1.40	2.300297	0.496867	0.75048	0.38586
1.42	2.290526	0.436308	0.72290	0.33861
1.44	2.281134	0.375551	0.69863	0.29146
1.46	2.272227	0.314655	0.67753	0.24436
1.48	2.263889	0.253677	0.65959	0.19725
1.50	2.256183	0.192665	0.64476	0.15008
1.52	2.249155	0.131661	0.63297	0.10281
1.54	+ 2.242835	+ 0.070705	— 0.62414	— 0.05538

ψ	E	F	ξ	η
1.56	+ 2.237236	+ 0.009834	- 0.61821	- 0.00773
1.58	2.232355	- 0.050916	0.61513	+ 0.04019
1.60	2.228176	0.111508	0.61484	0.08845
1.62	+ 2.224664	- 0.171901	- 0.61727	+ 0.13712

Bahn 13.

$$E_0 = + 0.55. F_0 = 0. K = 11.4.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.550000	0.000000	+ 0.85252	0.00000
0.02	0.549421 ·	+ 0.072334	0.85504	- 0.03780
0.04	0.547699	0.144611	0.86268	0.07557
0.06	0.544878	0.216771 ·	0.87534	0.11324
0.08	0.541032	0.288751	0.89316	0.15079
0.10	0.536268 ·	0.360479 ·	0.91607	0.18820
0.12	0.530724	0.431877 ·	0.94413	0.22546
0.14	0.524572 ·	0.502856	0.97730	0.26260
0.16	0.518021 ·	0.573313	1.01555	0.29970
0.18	0.511315	0.643133 ·	1.05873	0.33685
0.20	0.504737 ·	0.712186	1.10680	0.37426
0.22	0.498609	0.780325 ·	1.15947	0.41220
0.24	0.493288	0.847389	1.21639	0.45103
0.26	0.489168	0.913199	1.27706	0.49128
0.28	0.486672 ·	0.977561 ·	1.34094	0.53356
0.30	0.486250 ·	1.040270 ·	1.40716	0.57869
0.32	0.488368 ·	1.101106	1.47476	0.62753
0.34	0.493496	1.159840	1.54245	0.68117
0.36	0.502092 ·	1.216243	1.60889	0.74070
0.38	0.514589 ·	1.270081 ·	1.67219	0.80726
0.40	0.531370 ·	1.321133	1.73048	0.88190
0.42	0.552755	1.369186	1.78152	0.96550
0.44	0.578975	1.414049	1.82288	1.05859
0.46	+ 0.610157 ·	+ 1.455557 ·	+ 1.85229	- 1.16134

ψ	E	F	ξ	η
0.48	+ 0.646312	+ 1.493566	+ 1.86704	- 1.27324
0.50	0.687320	1.527992	1.86504	1.39326
0.52	0.732937	1.558787	1.84442	1.51964
0.54	0.782796	1.585952	1.80383	1.65004
0.56	0.836427	1.609545	1.74248	1.78164
0.58	0.893276	1.629644	1.66058	1.91122
0.60	0.952731	1.646412	1.55906	2.03568
0.62	1.014159	1.660047	1.43963	2.15205
0.64	1.076937	1.670786	1.30467	2.25774
0.66	1.140485	1.678898	1.15678	2.35078
0.68	1.204286	1.684676	0.99912	2.42972
0.70	1.267911	1.688413	0.83454	2.49400
0.72	1.331026	1.690405	0.66566	2.54365
0.74	1.393395	1.690922	0.49490	2.57894
0.76	1.454871	1.690201	0.32417	2.60041
0.78	1.515383	1.688433	+ 0.15497	2.60906
0.80	1.574925	1.685759	- 0.01152	2.60563
0.82	+ 1.633526	+ 1.682267	- 0.17439	- 2.59077

Bahn 14.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.55. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.49384.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.550000	0.000000	+ 0.85252	0.00000
0.02	0.549368	+ 0.074802	0.85522	- 0.03909
0.04	0.547492	0.149537	0.86338	0.07813
0.06	0.544421	0.224136	0.87700	0.11706
0.08	0.540241	0.298523	0.89608	0.15584
0.10	0.535075	0.372615	0.92062	0.19442
0.12	0.529083	0.446320	0.95070	0.23283
0.14	0.522463	0.519532	0.98620	0.27108
0.16	+ 0.515456	+ 0.592127	+ 1.02712	- 0.30924

ψ	E	F	ξ	η
0.18	+ 0.508345	+ 0.663971	+ 1.07327	— 0.34746
0.20	0.501455	0.734908	1.12453	0.38595
0.22	0.495155	0.804765	1.18054	0.42503
0.24	0.489854	0.873350	1.24086	0.46518
0.26	0.485997	0.940453	1.30488	0.50696
0.28	0.484059	1.005848	1.37190	0.55111
0.30	0.484536	1.069294	1.44087	0.59855
0.32	0.487931	1.130539	1.51057	0.65033
0.34	0.494742	1.189326	1.57946	0.70757
0.36	0.505429	1.245400	1.64589	0.77143
0.38	0.520409	1.298509	1.70781	0.84304
0.40	0.540023	1.348419	1.76300	0.92336
0.42	0.564517	1.394919	1.80900	1.01300
0.44	0.594018	1.437828	1.84331	1.11215
0.46	0.628524	1.477005	1.86371	1.22042
0.48	0.667891	1.512355	1.86774	1.33683
0.50	0.711843	1.543839	1.85352	1.45962
0.52	0.759965	1.571481	1.81992	1.58654
0.54	0.811745	1.595362	1.76633	1.71479
0.56	0.866577	1.615632	1.69296	1.84142
0.58	0.923823	1.632481	1.60096	1.96332
0.60	0.982824	1.646176	1.49204	2.07780
0.62	1.042954	1.657022	1.36858	2.18262
0.64	1.103653	1.665361	1.23319	2.27611
0.66	1.164433	1.671558	1.08865	2.35721
0.68	1.224941	1.675985	0.93754	2.42578
0.70	1.284924	1.679006	0.78208	2.48188
0.72	1.344256	1.680959	0.62407	2.52606
0.74	1.402924	1.682142	0.46476	2.55906
0.76	1.461013	1.682802	0.30493	2.58171
0.78	1.518687	1.683118	+ 0.14502	2.59470
0.80	1.576167	1.683199	— 0.01496	2.59841
0.82	1.633703	1.683079	0.17501	2.59306
0.84	+ 1.691624	+ 1.682705	— 0.33547	— 2.57824

Bahn 15.

$$E_0 = + 0.55. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.6.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.550000	0.000000	+ 0.85252	0.00000
0.02	0.549402	+ 0.072182	0.85506	- 0.03769
0.04	0.547624	0.144301	0.86267	0.07539
0.06	0.544709	0.216294	0.87536	0.11295
0.08	0.540732	0.288089	0.89316	0.15036
0.10	0.535796	0.359612	0.91605	0.18757
0.12	0.530040	0.430777	0.94408	0.22458
0.14	0.523633	0.501490	0.97722	0.26141
0.16	0.516781	0.571640	1.01538	0.29807
0.18	0.509725	0.641108	1.05849	0.33469
0.20	0.502743	0.709756	1.10638	0.37143
0.22	0.496149	0.777432	1.15881	0.40852
0.24	0.490293	0.843967	1.21546	0.44630
0.26	0.485558	0.909175	1.27579	0.48524
0.28	0.482351	0.972857	1.33928	0.52591
0.30	0.481105	1.034801	1.40513	0.56902
0.32	0.482261	1.094780	1.47207	0.61541
0.34	0.486259	1.152564	1.53921	0.66604
0.36	0.493525	1.207920	1.60511	0.72188
0.38	0.504450	1.260614	1.66815	0.78397
0.40	0.519372	1.310424	1.72652	0.85320
0.42	0.538560	1.357145	1.77808	0.93034
0.44	0.562191	1.400592	1.82083	1.01576
0.46	0.590336	1.440611	1.85258	1.10954
0.48	0.622951	1.477086	1.87137	1.21119
0.50	0.659867	1.509944	1.87539	1.31970
0.52	0.700795	1.539163	1.86312	1.43347
0.54	0.745333	1.564773	1.83379	1.55057
0.56	0.792990	1.586865	1.78696	1.66846
0.58	0.843211	1.605582	1.72300	1.78476
0.60	0.895385	1.621129	1.64319	1.89691
0.62	+ 0.948915	+ 1.633759	+ 1.54913	- 2.00266

ψ	E	F	ξ	η
0.64	+ 1.003230	+ 1.643774	+ 1.44280	— 2.10014
0.66	1.057809	1.651514	1.32676	2.18825
0.68	1.112224	1.657342	1.20317	2.26626
0.70	1.166148	1.661639	1.07437	2.33400
0.72	1.219371	1.664784	0.94215	2.39194
0.74	1.271800	1.667140	0.80796	2.44078
0.76	1.323457	1.669045	0.67273	2.48147
0.78	1.374471	1.670797	0.53687	2.51488
0.80	1.425065	1.672645	0.40036	2.54194
0.82	1.475537	1.674775	0.26275	2.56341
0.84	1.526243	1.677312	+ 0.12333	2.57953
0.86	1.577573	1.680303	— 0.01882	2.59035
0.88	1.629927	1.683726	0.16462	2.59544
0.90	1.683696	1.687476	0.31494	2.59382
0.92	1.739225	1.691375	0.47031	2.58424
0.94	1.796799	1.695173	0.63094	2.56506
0.96	1.856602	1.698550	0.79630	2.53441
0.98	1.918703	1.701134	0.96527	2.49012
1.00	1.983024	1.702505	1.13582	2.43053
1.02	2.049328	1.702221	1.30509	2.35400
1.04	2.117214	1.699826	1.46947	2.26000
1.06	2.186117	1.694879	1.62477	2.14857
1.08	2.255326	1.686967	1.76672	2.02119
1.10	2.324023	1.675725	1.89122	1.88043
1.12	2.391305	1.660841	1.99467	1.72977
1.14	2.456251	1.642075	2.07462	1.57359
1.16	2.517972	1.619255	2.12985	1.41652
1.18	2.575644	1.592277	2.16015	1.26320
1.20	2.628565	1.561112	2.16680	1.11764
1.22	2.676176	1.525791	2.15195	0.98317
1.24	2.718094	1.486406	2.11840	0.86198
1.26	2.754105	1.443101	2.06929	0.75527
1.28	2.784170	1.396064	2.00790	0.66329
1.30	+ 2.808409	+ 1.345519	— 1.93755	— 0.58540

ψ	E	F	ξ	η
1.32	+ 2.827079	+ 1.291713	- 1.86092	- 0.52036
1.34	2.840550	1.234913	1.78058	0.46661
1.36	2.849276	1.175391	1.69880	0.42228
1.38	2.853770	1.113413	1.61719	0.38553
1.40	2.854576	1.049263	1.53731	0.35462
1.42	2.852252	0.983178	1.46020	0.32795
1.44	2.847346	0.915404	1.38678	0.30414
1.46	2.840388	0.846163	1.31773	0.28207
1.48	2.831872	0.775659	1.25360	0.26085
1.50	2.822261	0.704078	1.19465	0.23976
1.52	2.811966	0.631587	1.14121	0.21830
1.54	2.801362	0.558334	1.09347	0.19615
1.56	2.790770	0.484453	1.05145	0.17308
1.58	2.780470	0.410061	1.01524	0.14898
1.60	2.770700	0.335265	0.98490	0.12381
1.62	2.761649	0.260158	0.96030	0.09758
1.64	2.753472	0.184826	0.94148	0.07035
1.66	2.746280	0.109346	0.92840	0.04219
1.68	2.740150	+ 0.033793	0.92104	- 0.01321
1.70	2.735121	- 0.041761	0.91933	+ 0.01652
1.72	2.731198	0.117243	0.92330	0.04688
1.74	+ 2.728347	- 0.192576	- 0.93288	+ 0.07782

Bahn 16.

$$E_0 = + 0.6. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.4.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.60000	0.00000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.59771	+ 0.14181	0.83495	- 0.08007
0.08	0.59107	0.28319	0.86386	0.15993
0.12	0.58073	0.42360	0.91222	0.23942
0.16	0.56787	0.56242	0.97992	0.31869
0.20	+ 0.55414	+ 0.69882	+ 1.0666	- 0.39839

ψ	E	F	ξ	η
0.24	+ 0.54179 ·	+ 0.83174 ·	+ 1.1706	— 0.48009
0.28	0.53360 ·	0.95990	1.2890	0.56675
0.32	0.53282 ·	1.08178 ·	1.4165	0.66315
0.36	0.54295	1.19572	1.5447	0.77585
0.40	0.56735	1.29997	1.6621	0.91268
0.44	0.60878 ·	1.39292 ·	1.7535	1.0803
0.48	0.66885	1.47325	1.8015	1.2818
0.52	0.74752 ·	1.54011	1.7893	1.5128
0.56	0.84303	1.59329 ·	1.7040	1.7609
0.60	0.95205	1.63334	1.5418	2.0063
0.64	1.07043	1.66150 ·	1.3090	2.2274
0.68	1.19398 ·	1.67958	1.0210	2.4068
0.72	1.31930 ·	1.68966 ·	0.69707	2.5342
0.76	1.44422 ·	1.69374	0.35495	2.6070
0.80	1.56776	1.69326	+ 0.00853	2.6266
0.84	1.68969 ·	1.68891	— 0.33204	2.5960
0.88	1.80999 ·	1.68045 ·	0.65797	2.5171
0.92	1.92810 ·	1.66681 ·	0.95905	2.3920
0.96	2.04260	1.64640	1.2228	2.2248
1.00	2.15105 ·	1.61730 ·	1.4359	2.0244
1.04	2.25028	1.57781 ·	1.5869	1.8039
1.08	2.33704	1.52663 ·	1.6711	1.5799
1.12	2.40861	1.46307 ·	1.6910	1.3675
1.16	2.46345	1.38705	1.6559	1.1773
1.20	2.50143	1.29915 ·	1.5795	1.0135
1.24	2.52383 ·	1.20045	1.4766	0.87476
1.28	2.53294	1.09234	1.3605	0.75638
1.32	2.53170	0.97637	1.2425	0.65243
1.36	2.52322	0.85411	1.1305	0.55757
1.40	2.51049	0.72701 ·	1.0303	0.46777
1.44	2.49608	0.59633	0.94508	0.38041
1.48	2.48213 ·	0.46312 ·	0.87660	0.29401
1.52	2.47029 ·	0.32821	0.82556	0.20783
1.56	+ 2.46171	+ 0.19223	— 0.79206	— 0.12161

ψ	E	F	ξ	η
1.60	+ 2.45713	+ 0.05570	— 0.77596	— 0.03523
1.64	2.45690	— 0.08097	0.77716	+ 0.05126
1.68	+ 2.46096	— 0.21738	— 0.79561	+ 0.13787

Bahn 17.

Periodisch (unsymmetrisch).

$$E_0 = + 0.6. F_0 = 0. K = 11.43879.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.60000	0.00000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.59770	+ 0.14174	0.83495	— 0.08004
0.08	0.59100	0.28303	0.86386	0.15982
0.12	0.58060	0.42336	0.91220	0.23923
0.16	0.56761	0.56205	0.97990	0.31834
0.20	0.55373	0.69830	1.06653	0.39779
0.24	0.54117	0.83102	1.17051	0.47909
0.28	0.53270	0.95893	1.28879	0.56516
0.32	0.53155	1.08051	1.41616	0.66065
0.36	0.54117	1.19406	1.54425	0.77206
0.40	0.56489	1.29788	1.66173	0.90696
0.44	0.60539	1.39033	1.75360	1.07193
0.48	0.66418	1.47011	1.80304	1.26974
0.52	0.74117	1.53640	1.79367	1.49638
0.56	0.83452	1.58909	1.71356	1.73948
0.60	0.94089	1.62873	1.55919	1.98024
0.64	1.05619	1.65669	1.33697	2.19850
0.68	1.17632	1.67488	1.06178	2.37767
0.72	1.29809	1.68553	0.75153	2.50876
0.76	1.41957	1.69073	0.42242	2.58965
0.80	1.54009	1.69211	+ 0.08619	2.62212
0.84	1.65991	1.69046	— 0.24946	2.60838
0.88	1.77947	1.68560	0.57810	2.54871
0.92	+ 1.89877	+ 1.67648	— 0.89125	— 2.44229

ψ	E	F	ξ	η
0.96	+ 2.01679 ·	+ 1.66128 ·	— 1.17676	— 2.28974
1.00	2.13125 ·	1.63793 ·	1.41906	2.09643
1.04	2.23883	1.60435	1.60300	1.87370
1.08	2.33566	1.55888	1.71858	1.63889
1.12	2.41820 ·	1.50044 ·	1.76396	1.41010
1.16	2.48396 ·	1.42880	1.74644	1.20235
1.20	2.53199 ·	1.34429	1.67919	1.02333
1.24	2.56291 ·	1.24795	1.57819	0.87400
1.28	2.57875	1.14111 ·	1.45877	0.74993
1.32	2.58236 ·	1.02546 ·	1.33379	0.64454
1.36	2.57715 ·	0.90264 ·	1.21308	0.55116
1.40	2.56627	0.77423 ·	1.10331	0.46464
1.44	2.55268	0.64164 ·	1.00870	0.38137
1.48	2.53883	0.50605	0.93154	0.29929
1.52	2.52666	0.36838 ·	0.87288	0.21736
1.56	2.51755	0.22941	0.83295	0.13523
1.60	2.51243 ·	+ 0.08968	0.81176	— 0.05285
1.64	2.51179 ·	— 0.05132	0.80920	+ 0.03024
1.68	+ 2.51568 ·	— 0.19116	— 0.82528	+ 0.11267

Bahn 18.

$$E_0 = + 0.6. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.44.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.60000	0.00000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.59770	+ 0.14174 ·	0.83493	— 0.08003
0.08	0.59100 ·	0.28303	0.86386	0.15982
0.12	0.58059 ·	0.42335	0.91220	0.23922
0.16	0.56760 ·	0.56204 ·	0.97990	0.31832
0.20	0.55371 ·	0.69828 ·	1.0665	0.39776
0.24	0.54115	0.83100	1.1705	0.47906
0.28	0.53267	0.95890 ·	1.2888	0.56510
0.32	+ 0.53151 ·	+ 1.08047	+ 1.4162	— 0.66057

ψ	E	F	ξ	η
0.36	+ 0.54112	+ 1.19401 ·	+ 1.5443	— 0.77195
0.40	0.56481 ·	1.29782	1.6617	0.90678
0.44	0.60529	1.39025	1.7536	1.0716
0.48	0.66404	1.47001	1.8031	1.2694
0.52	0.74097 ·	1.53628 ·	1.7938	1.4959
0.56	0.83425	1.58896 ·	1.7139	1.7388
0.60	0.94054	1.62859	1.5597	1.9795
0.64	1.05574 ·	1.65654	1.3378	2.1976
0.68	1.17577 ·	1.67474	1.0630	2.3768
0.72	1.29743	1.68540	0.75321	2.5079
0.76	1.41880	1.69064	0.42451	2.5890
0.80	1.53923	1.69207 ·	+ 0.08860	2.6220
0.84	1.65898	1.69050 ·	— 0.24689	2.6087
0.88	1.77852	1.68576	0.57557	2.5496
0.92	1.89785	1.67678	0.88910	2.4439
0.96	2.01599	1.66175	1.1753	2.2919
1.00	2.13063 ·	1.63858	1.4184	2.0987
1.04	2.23847	1.60518	1.6035	1.8760
1.08	2.33561 ·	1.55989	1.7201	1.6407
1.12	2.41850 ·	1.50161 ·	1.7663	1.4114
1.16	2.48460 ·	1.43010 ·	1.7493	1.2031
1.20	2.53294	1.34570	1.6824	1.0236
1.24	2.56412 ·	1.24942	1.5814	0.87390
1.28	2.58018	1.14264	1.4610	0.74962
1.32	2.58395	1.02700	1.3367	0.64419
1.36	2.57884	0.90416	1.2157	0.55086
1.40	2.56801 ·	0.77571	1.1056	0.46444
1.44	2.55445	0.64306	1.0107	0.38132
1.48	2.54060 ·	0.50739	0.93326	0.29939
1.52	2.52842	0.36964	0.87434	0.21760
1.56	2.51929 ·	0.23057	0.83426	0.13559
1.60	2.51416 ·	+ 0.09074 ·	0.81287	— 0.05335
1.64	2.51351	— 0.04936	0.81016	+ 0.02901
1.68	+ 2.51739 ·	— 0.18931 ·	— 0.82600	+ 0.11131

Bahn 19.

$$E_0 = +0.6. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.45.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.600000	0.000000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.597693	+ 0.141724	0.83493	— 0.08002
0.08	0.590989	0.282994	0.86386	0.15979
0.12	0.580556	0.423288	0.91220	0.23918
0.16	0.567539	0.561953	0.97990	0.31824
0.20	0.553609	0.698150	1.0665	0.39764
0.24	0.540983	0.830818	1.1705	0.47879
0.28	0.532448	0.958653	1.2887	0.56469
0.32	0.531194	1.080135	1.4160	0.65991
0.36	0.540673	1.193582	1.5441	0.77096
0.40	0.564188	1.297262	1.6616	0.90530
0.44	0.604418	1.389565	1.7536	1.0695
0.48	0.662831	1.469182	1.8035	1.2663
0.52	0.739330	1.535310	1.7949	1.4916
0.56	0.832043	1.587820	1.7162	1.7332
0.60	0.937652	1.627332	1.5640	1.9726
0.64	1.052043	1.655213	1.3449	2.1898
0.68	1.171173	1.673406	1.0734	2.3687
0.72	1.291865	1.684162	0.76725	2.5006
0.76	1.412254	1.689640	0.44222	2.5836
0.80	1.531784	1.691498	+ 0.10943	2.6197
0.84	1.650825	1.690582	— 0.22413	2.6107
0.88	1.769979	1.686743	0.55274	2.5568
0.92	1.889416	1.678909	0.86868	2.4564
0.96	2.008258	1.665275	1.1600	2.3090
1.00	2.124323	1.643629	1.4107	2.1185
1.04	2.234225	1.611865	1.6047	1.8959
1.08	2.334011	1.568158	1.7303	1.6582
1.12	2.419854	1.511398	1.7842	1.4246
1.16	2.488992	1.441199	1.7727	1.2112
1.20	2.540177	1.357878	1.7089	1.0272
1.24	+ 2.573851	+ 1.262386	— 1.6090	— 0.87402

ψ	E	F	ξ	η
1.28	+ 2.591883	+ 1.156115	- 1.4889	- 0.74784
1.32	2.597155	1.040704	1.3619	0.64171
1.36	2.592982	0.917851	1.2386	0.54876
1.40	2.582705	0.789182	1.1259	0.46328
1.44	2.569355	0.656138	1.0282	0.38136
1.48	2.555489	0.519938	0.9482	0.30077
1.52	2.543118	0.381561	0.88710	0.22022
1.56	2.533729	0.241780	0.84496	0.13944
1.60	2.528298	+ 0.101190	0.82194	- 0.05834
1.64	2.527354	- 0.039714	0.81784	+ 0.02289
1.68	+ 2.530986	- 0.180498	- 0.83270	+ 0.10405

Bahn 20.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.6. F_0 = 0. K = 11.46117.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.600000	0.000000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.597688	+ 0.141703	0.83495	- 0.08001
0.08	0.590971	0.282951	0.86386	0.15976
0.12	0.580516	0.423217	0.91220	0.23911
0.16	0.567470	0.561848	0.97990	0.31814
0.20	0.553492	0.698002	1.06650	0.39744
0.24	0.540809	0.830614	1.17041	0.47852
0.28	0.532192	0.958379	1.28864	0.56424
0.32	0.530834	1.079773	1.41593	0.65921
0.36	0.540172	1.193113	1.54396	0.76990
0.40	0.563495	1.296669	1.66138	0.90370
0.44	0.603457	1.388830	1.75360	1.06712
0.48	0.661513	1.468293	1.80383	1.26288
0.52	0.737538	1.534265	1.79613	1.48693
0.56	0.829649	1.586625	1.71885	1.72720
0.60	+ 0.934512	+ 1.626015	+ 1.56881	- 1.96527

ψ	E	F	ξ	η
0.64	+ 1.048050	+ 1.653823	+ 1.35256	- 2.18153
0.68	1.166214	1.672024	1.08460	2.36021
0.72	1.285882	1.682906	0.78238	2.49294
0.76	1.405257	1.688666	0.46114	2.57800
0.80	1.523872	1.691006	+ 0.13158	2.61741
0.84	1.642214	1.690809	- 0.20010	2.61306
0.88	1.761040	1.687959	0.52885	2.56465
0.92	+ 1.880706	+ 1.681385	- 0.84772	- 2.46989

Bahn 21.

$$E_0 = + 0.6. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.48.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.600000	0.000000	+ 0.82534	0.00000
0.04	0.597681	+ 0.141669	0.83495	- 0.07999
0.08	0.590942	0.282879	0.86388	0.15972
0.12	0.580448	0.423099	0.91220	0.23902
0.16	0.567343	0.561672	0.97988	0.31796
0.20	0.553294	0.697752	1.0665	0.39714
0.24	0.540515	0.830270	1.1704	0.47803
0.28	0.531761	0.957917	1.2885	0.56347
0.32	0.530227	1.079163	1.4157	0.65803
0.36	0.539327	1.192323	1.5437	0.76808
0.40	0.562325	1.295669	1.6612	0.90098
0.44	0.601836	1.387591	1.7536	1.0631
0.48	0.659290	1.466795	1.8045	1.2571
0.52	0.734516	1.532502	1.7982	1.4791
0.56	0.825612	1.584610	1.7232	1.7170
0.60	0.929243	1.623792	1.5767	1.9529
0.64	1.041313	1.651478	1.3654	2.1676
0.68	1.157848	1.669694	1.1034	2.3458
0.72	1.275791	1.680786	0.80770	2.4798
0.76	+ 1.393453	+ 1.687023	+ 0.49294	- 2.5682

ψ	E	F	ξ	η
0.80	+ 1.510527	+ 1.690176	+ 0.16880	— 2.6132
0.84	1.627691	1.691193	— 0.15953	2.6166
0.88	1.745964	1.690011	0.48832	2.5775
0.92	1.866014	1.685562	0.81188	2.4924
0.96	1.987208	1.675960	1.1186	2.3580
1.00	2.107752	1.658824	1.3922	2.1752
1.04	2.224140	1.631732	1.6133	1.9522
1.08	2.332224	1.592623	1.7663	1.7058
1.12	2.427312	1.540098	1.8434	1.4578
1.16	2.505894	1.473533	1.8482	1.2277
1.20	2.565945	1.393104	1.7933	1.0286
1.24	2.607264	1.299675	1.6957	0.86460
1.28	2.631410	1.194637	1.5730	0.73238
1.32	2.641123	1.079664	1.4404	0.62473
1.36	2.639843	0.956548	1.3094	0.53350
1.40	2.631111	0.827015	1.1883	0.45174
1.44	2.618246	0.692614	1.0823	0.37451
1.48	2.604082	0.554673	0.99454	0.29878
1.52	2.590897	0.414265	0.92632	0.22304
1.56	2.580383	0.272234	0.87818	0.14668
1.60	2.573697	+ 0.129254	0.85008	— 0.06971
1.64	2.571483	— 0.014151	0.84192	+ 0.00764
1.68	+ 2.573930	— 0.157507	— 0.85365	+ 0.08504

Bahn 22.

$$E_0 = + 0.7. F_0 = 0. K = 10.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.700000	0.000000	+ 0.76484	0.00000
0.02	0.699610	+ 0.069547	0.76695	— 0.04482
0.04	0.698452	0.139078	0.77325	0.08972
0.06	0.696564	0.208578	0.78380	0.13479
0.08	+ 0.694012	+ 0.278025	+ 0.79858	— 0.18013

ψ	E	F	ξ	η
0.10	+0.690888	+0.347393	+0.81768	-0.22587
0.12	0.687314	0.416650	0.84100	0.27206
0.14	0.683443	0.485756	0.86870	0.31894
0.16	0.679460	0.554659	0.90068	0.36668
0.18	0.675590	0.623297	0.93688	0.41552
0.20	0.672094	0.691593	0.97724	0.46578
0.22	0.669277	0.759458	1.0215	0.51780
0.24	0.667488	0.826787	1.0694	0.57214
0.26	0.667121	0.893459	1.1206	0.62934
0.28	0.668618	0.959334	1.1743	0.69020
0.30	0.672467	1.024256	1.2297	0.75560
0.32	0.679203	1.088052	1.2859	0.82655
0.34	0.689400	1.150529	1.3412	0.90432
0.36	0.703664	1.211476	1.3939	0.99015
0.38	0.722625	1.270666	1.4416	1.0855
0.40	0.746920	1.327854	1.4815	1.1916
0.42	0.777171	1.382775	1.5102	1.3097
0.44	0.813967	1.435144	1.5237	1.4403
0.46	0.857830	1.484659	1.5175	1.5835
0.48	0.909182	1.530991	1.4866	1.7384
0.50	0.968308	1.573787	1.4258	1.9023
0.52	1.035314	1.612671	1.3306	2.0713
0.54	1.110084	1.647238	1.1971	2.2393
0.56	1.192244	1.677072	1.0231	2.3987
0.58	1.281133	1.701748	0.8091	2.5402
0.60	1.375788	1.720861	0.5591	2.6539
0.62	1.474959	1.734052	+0.2794	2.7309
0.64	1.577147	1.741037	-0.0186	2.7639
0.66	1.680673	1.741638	0.3224	2.7491
0.68	1.783774	1.735795	0.6182	2.6864
0.70	+1.884706	+1.723581	-0.8928	-2.5805

Bahn 23.

$$E_0 = +0.7. F_0 = 0. K = 10.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.70000	0.00000	+ 0.76484	0.00000
0.02	0.69960	+ 0.06943	0.76695	— 0.04474
0.04	0.69842	0.13884	0.77325	0.08957
0.06	0.69648	0.20821	0.78380	0.13454
0.08	0.69386	0.27751	0.79857	0.17976
0.10	0.69064	0.34673	0.81764	0.22534
0.12	0.68694	0.41583	0.84098	0.27137
0.14	0.68292	0.48475	0.86870	0.31803
0.16	0.67876	0.55346	0.90062	0.36549
0.18	0.67468	0.62188	0.93685	0.41399
0.20	0.67094	0.68994	0.97718	0.46380
0.22	0.66785	0.75754	1.0214	0.51532
0.24	0.66574	0.82458	1.0693	0.56901
0.26	0.66501	0.89093	1.1204	0.62544
0.28	0.66608	0.95645	1.1742	0.68532
0.30	0.66943	1.02097	1.2296	0.74948
0.32	0.67559	1.08434	1.2858	0.81903
0.34	0.68511	1.14634	1.3413	0.89500
0.36	0.69857	1.20677	1.3944	0.97867
0.38	0.71658	1.26541	1.4427	1.0714
0.40	0.73975	1.32201	1.4838	1.1744
0.42	0.76867	1.37632	1.5142	1.2889
0.44	0.80389	1.42806	1.5302	1.4152
0.46	0.84590	1.47696	1.5276	1.5537
0.48	0.89510	1.52269	1.5019	1.7035
0.50	0.95175	1.56494	1.4482	1.8623
0.52	1.01593	1.60337	1.3621	2.0265
0.54	1.08753	1.63762	1.2401	2.1909
0.56	1.16620	1.66731	1.0799	2.3483
0.58	1.25133	1.69207	0.8817	2.4905
0.60	1.34203	1.71154	0.6483	2.6086
0.62	+ 1.43718	+ 1.72541	+ 0.3858	— 2.6941

ψ	E	F	ξ	η
0.64	+ 1.53540	+ 1.73342	+ 0.1032 ·	— 2.7399
0.66	1.63516	1.73539	— 0.1880 ·	2.7417
0.68	1.73485	1.73125	0.4756 ·	2.6986
0.70	+ 1.83283	+ 1.72105	— 0.7472 ·	— 2.6134

Bahn 24.

Periodisch (Libration um L_1).

$$E_0 = + 0.7. F_0 = 0. K = 10.4232.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.70000	0.00000	+ 0.76484	0.00000
0.02	0.69962	+ 0.06386	0.76663	— 0.04115
0.04	0.69849	0.12770	0.77206	0.08234
0.06	0.69664	0.19149	0.78110	0.12362
0.08	0.69410	0.25523	0.79377	0.16505
0.10	0.69096	0.31884	0.81014	0.20665
0.12	0.68730	0.38234	0.83014	0.24853
0.14	0.68322	0.44565	0.85382	0.29074
0.16	0.67884	0.50874	0.88122	0.33338
0.18	0.67434	0.57155	0.91222	0.37661
0.20	0.66989	0.63402	0.94680	0.42057
0.22	0.66570	0.69608	0.98483	0.46547
0.24	0.66202	0.75760	1.02614	0.51155
0.26	0.65909	0.81852	1.07049	0.55913
0.28	0.65721	0.87875	1.11756	0.60866
0.30	0.65672	0.93811	1.16684	0.66053
0.32	0.65794	0.99651	1.21775	0.71533
0.34	0.66124	1.05381	1.26959	0.77373
0.36	0.66704	1.10984	1.32130	0.83648
0.38	0.67571	1.16444	1.37181	0.90442
0.40	0.68766	1.21746	1.41974	0.97832
0.42	0.70329	1.26872	1.46347	1.05905
0.44	+ 0.72298	+ 1.31806	+ 1.50113	— 1.14742

ψ	E	F	ξ	η
0.46	+ 0.74709	+ 1.36529	+ 1.53048	- 1.24400
0.48	0.77592	1.41024	1.54925	1.34925
0.50	0.80974	1.45274	1.55482	1.46307
0.52	0.84873	1.49265	1.54446	1.58496
0.54	0.89301	1.52975	1.51552	1.71388
0.56	0.94260	1.56391	1.46531	1.84804
0.58	0.99743	1.59501	1.39174	1.98486
0.60	1.05729	1.62284	1.29312	2.12100
0.62	1.12187	1.64728	1.16865	2.25237
0.64	1.19080	1.66819	1.01840	2.37461
0.66	1.26352	1.68544	0.84390	2.48267
0.68	1.33941	1.69891	0.64796	2.57212
0.70	1.41776	1.70851	0.43460	2.63859
0.72	1.49775	1.71414	+ 0.20918	2.67869
0.74	1.57852	1.71577	- 0.02223	2.69056
0.76	1.65921	1.71338	0.25287	2.67325
0.78	1.73888	1.70699	0.47624	2.62782
0.80	+ 1.81671	+ 1.69665	- 0.68636	- 2.55682

Bahn 25.

$$E_0 = + 0.7. F_0 = 0. K = 10.9.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.70000	0.00000	+ 0.76484	0.00000
0.02	0.69951	+ 0.06846	0.76695	- 0.04408
0.04	0.69805	0.13687	0.77327	0.08824
0.06	0.69567	0.20522	0.78384	0.13245
0.08	0.69241	0.27345	0.79866	0.17675
0.10	0.68837	0.34151	0.81777	0.22120
0.12	0.68367	0.40936	0.84112	0.26585
0.14	0.67843	0.47692	0.86880	0.31077
0.16	0.67283	0.54412	0.90072	0.35609
0.18	+ 0.66706	+ 0.61088	+ 0.93687	- 0.40188

ψ	E	F	ξ	η
0.20	+ 0.66136	+ 0.67711	+ 0.97710	— 0.44838
0.22	0.65599	0.74268	1.0212	0.49580
0.24	0.65127	0.80746	1.0690	0.54442
0.26	0.64752	0.87132	1.1200	0.59467
0.28	0.64511	0.93408	1.1737	0.64697
0.30	0.64444	0.99557	1.2297	0.70190
0.32	0.64592	1.05562	1.2864	0.76017
0.34	0.64999	1.11405	1.3433	0.82256
0.36	0.65712	1.17064	1.3991	0.88998
0.38	0.66774	1.22519	1.4521	0.96322
0.40	0.68227	1.27750	1.5005	1.0432
0.42	0.70112	1.32735	1.5421	1.1308
0.44	0.72462	1.37455	1.5747	1.2264
0.46	0.75306	1.41892	1.5959	1.3304
0.48	0.78662	1.46028	1.6029	1.4425
0.50	0.82539	1.49848	1.5934	1.5620
0.52	0.86937	1.53339	1.5648	1.6876
0.54	0.91842	1.56490	1.5151	1.8170
0.56	0.97229	1.59292	1.4427	1.9476
0.58	1.03060	1.61741	1.3471	2.0761
0.60	1.09289	1.63833	1.2282	2.1987
0.62	1.15860	1.65568	1.0872	2.3115
0.64	1.22710	1.66950	0.92630	2.4108
0.66	1.29770	1.67981	0.74857	2.4931
0.68	1.36970	1.68670	0.55797	2.5557
0.70	1.44240	1.69024	0.35939	2.5966
0.72	1.51509	1.69050	+ 0.15608	2.6148
0.74	1.58710	1.68759	— 0.04558	2.6104
0.76	1.65779	1.68160	0.24156	2.5842
0.78	1.72658	1.67259	0.42775	2.5379
0.80	+ 1.79292	+ 1.66066	— 0.60061	— 2.4741

Bahn 26.

$$E_0 = +0.7. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.2.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.700000	0.000000	+ 0.76484	0.00000
0.02	0.699480	+ 0.068094	0.76695	— 0.04387
0.04	0.697930	0.136145	0.77328	0.08776
0.06	0.695384	0.204108	0.78384	0.13168
0.08	0.691902	0.271934	0.79870	0.17564
0.10	0.687566	0.339568	0.81777	0.21968
0.12	0.682485	0.406948	0.84116	0.26382
0.14	0.676793	0.474003	0.86880	0.30811
0.16	0.670655	0.540651	0.90072	0.35262
0.18	0.664264	0.606798	0.93683	0.39746
0.20	0.657843	0.672338	0.97702	0.44275
0.22	0.651649	0.737150	1.0210	0.48869
0.24	0.645969	0.801098	1.0687	0.53549
0.26	0.641119	0.864034	1.1196	0.58351
0.28	0.637446	0.925793	1.1732	0.63314
0.30	0.635320	0.986201	1.2291	0.68483
0.32	0.635132	1.045070	1.2860	0.73922
0.34	0.637281	1.102208	1.3434	0.79693
0.36	0.642172	1.157413	1.3998	0.85870
0.38	0.650198	1.210484	1.4539	0.92528
0.40	0.661729	1.261225	1.5042	0.99742
0.42	0.677097	1.309443	1.5487	1.0758
0.44	0.696581	1.354960	1.5857	1.1609
0.46	0.720391	1.397618	1.6131	1.2529
0.48	0.748656	1.437279	1.6289	1.3517
0.50	0.781414	1.473833	1.6311	1.4568
0.52	0.818605	1.507203	1.6178	1.5672
0.54	0.860069	1.537346	1.5877	1.6815
0.56	0.905552	1.564254	1.5396	1.7977
0.58	0.954718	1.587960	1.4730	1.9137
0.60	1.007159	1.608530	1.3879	2.0268
0.62	+ 1.062417	+ 1.626064	+ 1.2852	— 2.1345

ψ	E	F	ξ	η
0.64	+ 1.120006	+ 1.640696	+ 1.1660	— 2.2345
0.66	1.179431 ·	1.652579 ·	1.0322	2.3245
0.68	1.240213	1.661886 ·	0.88598	2.4022
0.70	1.301898 ·	1.668797 ·	0.72983	2.4667
0.72	1.364079 ·	1.673490	0.56630	2.5169
0.74	1.426393 ·	1.676130 ·	0.39803	2.5520
0.76	1.488527	1.676864	0.22745	2.5722
0.78	1.550209 ·	1.675807	+ 0.05694	2.5775
0.80	1.611206	1.673042	— 0.11142	2.5682
0.82	1.671304 ·	1.668613 ·	0.27560	2.5452
0.84	1.730306	1.662529	0.43381	2.5092
0.86	+ 1.788012	+ 1.654760	— 0.58436	— 2.4611

Bahn 27.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.7. F_0 = 0. K = 11.35336.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.700000	0.000000	+ 0.76484	0.00000
0.04	0.697862	+ 0.135767	0.77330	— 0.08751
0.08	0.691632	0.271156	0.79870	0.17507
0.12	0.681867	0.405703	0.84116	0.26275
0.16	0.669531	0.538860	0.90074	0.35084
0.20	0.656029	0.669887	0.97700	0.43988
0.24	0.643239 ·	0.797841	1.06861	0.53095
0.28	0.633512 ·	0.921558 ·	1.17311	0.62609
0.32	0.629608 ·	1.039668	1.28588	0.72858
0.36	0.634539	1.150647	1.39994	0.84290
0.40	0.651285 ·	1.252913	1.50564	0.97443
0.44	0.682405	1.344964 ·	1.59041	1.12811
0.48	0.729586	1.425545	1.64019	1.30638
0.52	0.793265	1.493815	1.64104	1.50707
0.56	+ 0.872438	+ 1.549493	+ 1.58215	— 1.72200

ψ	E	F	ξ	η
0.60	+ 0.964784 ·	+ 1.592938 ·	+ 1.45860	— 1.93768
0.62	1.014917 ·	1.610362	1.37319	2.04071
0.64	1.067113	1.625146	1.27326	2.13795
0.66	1.120945	1.637494 ·	1.16030	2.22775
0.68	1.176012 ·	1.647632	1.03598	2.30872
0.70	1.231964	1.655792	0.90214	2.37968
0.72	1.288503 ·	1.662207	0.76055	2.44006
0.74	1.345400	1.667097 ·	0.61299	2.48939
0.76	1.402487 ·	1.670664	0.46100	2.52753
0.78	1.459657	1.673069	0.30591	2.55453
0.80	1.516853 ·	1.674438	+ 0.14891	2.57047
0.82	1.574054	1.674851	— 0.00900	2.57535
0.84	1.631259	1.674333 ·	0.16685	2.56929
0.86	+ 1.688467	+ 1.672859	— 0.32374	— 2.55206

Bahn 28.

$$E_0 = + 0.7. F_0 = 0. K = 11.4.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.700000	0.000000	+ 0.76484	0.00000
0.04	0.697842	+ 0.135652	0.77332	— 0.08743
0.08	0.691549 ·	0.270912	0.79868	0.17489
0.12	0.681679	0.405324 ·	0.84116	0.26245
0.16	0.669189	0.538316	0.90074	0.35030
0.20	0.655477 ·	0.669142	0.97695	0.43899
0.24	0.642409 ·	0.796851	1.0686	0.52956
0.28	0.632316	0.920270 ·	1.1730	0.62399
0.32	0.627928 ·	1.038025 ·	1.2858	0.72537
0.36	0.632217 ·	1.148589 ·	1.4000	0.83812
0.40	0.648109	1.250385 ·	1.5060	0.96747
0.44	0.678093 ·	1.341925	1.5917	1.1182
0.48	0.723787	1.421977 ·	1.6434	1.2927
0.52	+ 0.785559 ·	+ 1.489744 ·	+ 1.6478	— 1.4889

ψ	E	F	ξ	η
0.56	+0.862367 ·	+1.545004	+ 1.5945	— 1.6990
0.60	0.951897 ·	1.588196 ·	1.4791	1.9103
0.64	1.051028 ·	1.620417	1.3045	2.1080
0.68	1.156489	1.643297 ·	1.0800	2.2788
0.70	1.210696	1.651837	0.95284	2.3513
0.72	1.265520	1.658776	0.81798	2.4142
0.74	1.320769	1.664351 ·	0.67691	2.4672
0.76	1.376321 ·	1.668778 ·	0.53089	2.5104
0.78	1.432119	1.672236 ·	0.38096	2.5434
0.80	1.488159 ·	1.674863 ·	0.22803	2.5666
0.82	1.544479	1.676748 ·	+ 0.07282	2.5798
0.84	1.601137	1.677923 ·	— 0.08404	2.5826
0.86	1.658194 ·	1.678363 ·	0.24194	2.5752
0.88	1.715694 ·	1.677986 ·	0.40008	2.5569
0.90	+ 1.773643	+ 1.676656	— 0.55750	— 2.5274

Bahn 29.

$$E_0 = + 0.8. \quad F_0 = 0. \quad K = 9.7.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.800000	0.000000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.798887	+ 0.134201 ·	0.70380	— 0.09645
0.08	0.795733 ·	0.268333 ·	0.72510	0.19400
0.12	0.791105 ·	0.402268 ·	0.76072	0.29385
0.16	0.785987	0.535774	0.81057	0.39746
0.20	0.781851	0.668454 ·	0.87414	0.50686
0.24	0.780726 ·	0.799698	0.94992	0.62476
0.28	0.785281	0.928623	1.03467	0.75508
0.32	0.798846 ·	1.054030	1.12226	0.90310
0.36	0.825382 ·	1.174366	1.20230	1.0754
0.40	0.869261	1.287675 ·	1.25820	1.2789
0.44	0.934838	1.391576 ·	1.26803	1.5175
0.48	+ 1.025686 ·	+ 1.483223	+ 1.20142	— 1.7872

ψ	E	F	ξ	η
0.52	+ 1.143512	+ 1.559346	+ 1.02895	— 2.0684
0.56	1.28697	1.61639	0.73277	2.3214
0.60	1.45061	1.65097	+ 0.32395	2.4920
0.64	1.62503	1.66052	— 0.14745	2.5323
0.68	+ 1.79839	+ 1.64420	— 0.60584	— 2.4276

Bahn 30.

$$E_0 = + 0.8. \quad F_0 = 0. \quad K = 9.9.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.800000	0.000000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.798795	+ 0.133582	0.70380	— 0.09600
0.08	0.795359	0.267059	0.72502	0.19298
0.12	0.790239	0.400270	0.76080	0.29205
0.16	0.784407	0.532947	0.81072	0.39455
0.20	0.779280	0.664657	0.87444	0.50225
0.24	0.776824	0.794754	0.95048	0.61767
0.28	0.779601	0.922330	1.03569	0.74413
0.32	0.790789	1.046179	1.12455	0.88702
0.36	0.814125	1.164757	1.20725	1.0518
0.40	0.853693	1.276181	1.26909	1.2451
0.44	0.913502	1.378212	1.28909	1.4708
0.48	0.996800	1.468269	1.24129	1.7262
0.52	1.10514	1.54348	1.09882	1.9958
0.56	1.23736	1.60081	0.84422	2.2467
0.60	1.38883	1.63740	0.48283	2.4328
0.64	1.55140	1.65110	+ 0.05223	2.5100
0.68	1.71469	1.64101	— 0.38391	2.4577
0.72	+ 1.86816	+ 1.60795	— 0.76075	— 2.2909

Bahn 31.

$$E_0 = + 0.8. \quad F_0 = 0. \quad K = 10.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.800000	0.000000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.798749	+ 0.133270	0.70382	- 0.09577
0.08	0.795172	0.266418	0.72515	0.19248
0.12	0.789812	0.399265	0.76083	0.29116
0.16	0.783618	0.531527	0.81080	0.39310
0.20	0.777997	0.662752	0.87456	0.49997
0.24	0.774879	0.792279	0.95072	0.61413
0.28	0.776772	0.919186	1.03629	0.73898
0.32	0.786781	1.042258	1.12567	0.87906
0.36	0.808534	1.159966	1.20961	1.0402
0.40	0.845980	1.270454	1.27400	1.2284
0.44	0.902959	1.371552	1.29897	1.4477
0.48	0.982563	1.460805	1.25997	1.6960
0.52	1.086258	1.535525	1.13167	1.9593
0.56	1.212966	1.592932	0.89688	2.2081
0.60	1.358374	1.630442	0.55891	2.4000
0.64	1.51499	1.64609	+ 0.15003	2.4930
0.68	1.67310	1.63906	- 0.27290	2.4652
0.72	+ 1.82276	+ 1.60997	- 0.64850	- 2.3256

Bahn 32.

$$E_0 = + 0.8. \quad F_0 = 0. \quad K = 10.5.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79852	+ 0.13170	0.70383	- 0.09461
0.08	0.79423	0.26320	0.72525	0.18993
0.12	0.78765	0.39423	0.76105	0.28668
0.16	0.77967	0.52441	0.81120	0.38582
0.20	+ 0.77158	+ 0.65322	+ 0.87526	- 0.48857

ψ	E	F	ξ	η
0.24	+ 0.76516	+ 0.77990 ·	+ 0.95196	— 0.59665
0.28	0.76266 ·	0.90349	1.0387	0.71262
0.32	0.76684 ·	1.02273 ·	1.1307	0.83998
0.36	0.78084	1.13615	1.2203	0.98322
0.40	0.80794 ·	1.24201 ·	1.2961	1.1471
0.44	0.85124 ·	1.33849	1.3430	1.3353
0.48	0.91312	1.42364	1.3427	1.5478
0.52	0.99457 ·	1.49560	1.2767	1.7768
0.56	1.09482	1.55272 ·	1.1309	2.0055
0.60	1.21081	1.59365	0.90265	2.2080
0.64	1.33750 ·	1.61760 ·	0.60561	2.3557
0.68	1.46842	1.62438 ·	+ 0.26941	2.4263
0.72	1.59657	1.61460 ·	— 0.06733	2.4127
0.76	1.71566	1.58938 ·	0.36846	2.3237
0.80	1.82058 ·	1.55035	0.60877	2.1806
0.84	1.90832	1.49927	0.77848	2.0075
0.88	1.97723	1.43783 ·	0.87942	1.8252
0.92	2.02746 ·	1.36771	0.92183	1.6477
0.96	2.06009	1.29034 ·	0.91870	1.4824
1.00	2.07688	1.20719	0.88300	1.3317
1.04	2.08005	1.11957 ·	0.82634	1.1949
1.08	2.07186	1.02871	0.75776	1.0700
1.12	2.05445 ·	0.93574 ·	0.68393	0.95472
1.16	2.02973	0.84169 ·	0.60940	0.84692
1.20	1.99922 ·	0.74746	0.53701	0.74498
1.24	1.96420	0.65384	0.46824	0.64784
1.28	+ 1.92541	+ 0.56148 ·	— 0.40341	— 0.55465

Bahn 33.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.3.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	+ 0.79814 ·	+ 0.12915 ·	+ 0.70387	— 0.09274

ψ	E	F	ξ	η
0.08	+ 0.79272	+ 0.25798	+ 0.72540	— 0.18580
0.12	0.78419	0.38607	0.76138	0.27949
0.16	0.77334	0.51293	0.81180	0.37422
0.20	0.76132	0.63789	0.87630	0.47053
0.24	0.74966	0.76011	0.95374	0.56926
0.28	0.74027	0.87850	1.0420	0.67177
0.32	0.73540	0.99180	1.1372	0.77998
0.36	0.73752	1.09856	1.2336	0.89654
0.40	0.74905	1.19726	1.3230	1.0245
0.44	0.77211	1.28642	1.3956	1.1663
0.48	0.80811	1.36475	1.4405	1.3228
0.52	0.85739	1.43133	1.4473	1.4916
0.56	0.91914	1.48572	1.4085	1.6664
0.60	0.99130	1.52812	1.3215	1.8377
0.64	1.07104	1.55935	1.1899	1.9948
0.68	1.15523	1.58081	1.0223	2.1285
0.72	1.24098	1.59433	0.83040	2.2338
0.76	1.32618	1.60190	0.62530	2.3096
0.80	1.40965	1.60542	0.41560	2.3586
0.84	1.49120	1.60649	+ 0.20617	2.3847
0.88	1.57134	1.60612	— 0.00141	2.3914
0.92	1.65102	1.60473	0.20746	2.3801
0.96	1.73121	1.60203	0.41246	2.3502
1.00	1.81250	1.59707	0.61526	2.2992
1.04	1.89482	1.58840	0.81190	2.2238
1.08	1.97721	1.57420	0.99502	2.1217
1.12	2.05779	1.55256	1.1548	1.9937
1.16	2.13402	1.52170	1.2810	1.8440
1.20	2.20296	1.48022	1.3654	1.6806
1.24	2.26203	1.42726	1.4048	1.5129
1.28	2.30926	1.36256	1.4009	1.3497
1.32	2.34378	1.28648	1.3603	1.1968
1.36	+ 2.36588	+ 1.19981	— 1.2924	— 1.0567

ψ	E	F	ξ	η
1.40	+ 2.37676 ·	+ 1.10377 ·	— 1.2075	— 0.92918
1.44	2.37840	0.99978	1.1149	0.81212
1.48	2.37306	0.88929	1.0224	0.70288
1.52	2.36306 ·	0.77370	0.93590	0.59917
1.56	2.35057 ·	0.65429	0.85918	0.49911
1.60	2.33745	0.53209	0.79426	0.40157
1.64	2.32516	0.40799 ·	0.74263	0.30562
1.68	2.31487	0.28266 ·	0.70453	0.21075
1.72	2.30735	0.15660	0.67998	0.11648
1.76	2.30309 ·	+ 0.03021 ·	0.66888	— 0.02247
1.80	2.30228	— 0.09617 ·	0.67107	+ 0.07168
1.84	2.30483 ·	0.22224	0.68648	0.16637
1.88	2.31038	0.34762	0.71515	0.26201
1.92	2.31826 ·	0.47184	0.75687	0.35904
1.96	2.32752 ·	0.59429 ·	0.81138	0.45798
2.00	2.33683 ·	0.71418	0.87772	0.55956
2.04	2.34457 ·	0.83046 ·	0.95400	0.66472
2.08	2.34880	0.94191	1.0369	0.77464
2.12	2.34740 ·	1.04712	1.1215	0.89108
2.16	2.33825	1.14452	1.2009	1.0157
2.20	2.31956 ·	1.23258 ·	1.2667	1.1495
2.24	2.29011 ·	1.30992 ·	1.3098	1.2924
2.28	2.24971	1.37540 ·	1.3215	1.4414
2.32	2.19925	1.42845	1.2969	1.5906
2.36	2.14077 ·	1.46904 ·	1.2345	1.7322
2.40	2.07720	1.49789	1.1388	1.8577
2.44	2.01176 ·	1.51634	1.0190	1.9606
2.48	1.94754 ·	1.52629 ·	0.88638	2.0382
2.52	1.88689	1.53002 ·	0.75148	2.0919
2.56	1.83123	1.52996 ·	0.62243	2.1265
2.60	1.78088	1.52831	0.50334	2.1484
2.64	1.73524 ·	1.52716 ·	0.39472	2.1644
2.68	+ 1.69285 ·	— 1.52812 ·	— 0.29383	+ 2.1800

ψ	E	F	ξ	η
2.72	+ 1.65167	— 1.53237	— 0.19570	+ 2.1994
2.76	1.60915 ·	1.54060 ·	0.09361	2.2250
2.80	1.56247	1.55291	+ 0.02055	2.2567
2.84	1.50870	1.56878	0.15542	2.2918
2.88	1.44507 ·	1.58702	0.31934	2.3238
2.92	1.36934 ·	1.60568 ·	0.51843	2.3419
2.96	1.28028	1.62211 ·	0.75353	2.3312
3.00	+ 1.17818	— 1.63304	+ 1.0167	+ 2.2747

Bahn 34.

Periodisch (symmetrisch).

$E_0 = + 0.8$. $F_0 = 0$. $K = 11.31144$.

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79814	+ 0.12912	0.70386	— 0.09271
0.08	0.79270	0.25790	0.72539	0.18573
0.12	0.78414	0.38595	0.76138	0.27938
0.16	0.77325 ·	0.51276 ·	0.81180	0.37405
0.20	0.76117 ·	0.63767 ·	0.87629	0.47027
0.24	0.74944	0.75982 ·	0.95376	0.56887
0.28	0.73995	0.87815	1.04203	0.67118
0.32	0.73496	0.99136	1.13725	0.77913
0.36	0.73691	1.09803	1.23367	0.89535
0.40	0.74822	1.19663	1.32331	1.02279
0.44	0.77101 ·	1.28568 ·	1.39625	1.16399
0.48	0.80667	1.36391 ·	1.44164	1.31973
0.52	0.85552	1.43041	1.44925	1.48764
0.56	0.91675 ·	1.48475	1.41160	1.66158
0.60	0.98833	1.52713	1.32628	1.83214
0.64	1.06743	1.55841	1.19670	1.98878
0.68	1.15094 ·	1.58000	1.03147	2.12259
0.72	1.23603 ·	1.59374	0.84194	2.22850
0.76	+ 1.32064	+ 1.60165 ·	+ 0.63905	— 2.30576

ψ	E	F	ξ	η
0.80	+ 1.40364	+ 1.60569	+ 0.43108	- 2.35697
0.84	1.48489	1.60739	0.22266	2.38584
0.88	1.56503	1.60787	+ 0.01497	2.39587
0.92	1.64510	1.60750	- 0.19268	2.38837
0.96	+ 1.72620	+ 1.60602	- 0.40116	- 2.36233

Bahn 35.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.4.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79809	+ 0.12883	0.70387	- 0.09251
0.08	0.79253	0.25732	0.72543	0.18527
0.12	0.78376	0.38504	0.76143	0.27859
0.16	0.77255	0.51149	0.81188	0.37278
0.20	0.76004	0.63598	0.87638	0.46830
0.24	0.74772	0.75764	0.95396	0.56590
0.28	0.73748	0.87540	1.0423	0.66676
0.32	0.73151	0.98796	1.1379	0.77270
0.36	0.73217	1.09391	1.2349	0.88608
0.40	0.74184	1.19173	1.3257	1.0098
0.44	0.76250	1.27999	1.4009	1.1462
0.48	0.79546	1.35746	1.4502	1.2959
0.52	0.84102	1.42330	1.4640	1.4571
0.56	0.89828	1.47719	1.4356	1.6241
0.60	0.96533	1.51948	1.3627	1.7888
0.64	1.03946	1.55110	1.2487	1.9418
0.68	1.11777	1.57368	1.1011	2.0757
0.72	1.19776	1.58916	0.93000	2.1863
0.76	1.27771	1.59975	0.74448	2.2737
0.80	1.35700	1.60757	0.55070	2.3406
0.84	1.43606	1.61436	0.35084	2.3909
0.88	+ 1.51621	+ 1.62136	+ 0.14338	- 2.4276

ψ	E	F	ξ	η
0.92	+ 1.59933	+ 1.62899 ·	— 0.07553	— 2.4503
0.96	1.68742	1.63693	0.31033	2.4556
1.00	1.78212	1.64392 ·	0.56306	2.4357
1.04	1.88411	1.64792 ·	0.83040	2.3801
1.08	1.99263	1.64632	1.1015	2.2786
1.12	2.10518	1.63615	1.3573	2.1259
1.16	2.21751 ·	1.61469	1.5743	1.9262
1.20	2.32440 ·	1.57966	1.7310	1.6945
1.24	2.42037 ·	1.52964 ·	1.8149	1.4526
1.28	2.50113 ·	1.46422	1.8262	1.2231
1.32	2.56399 ·	1.38373	1.7763	1.0208
1.36	2.60846	1.28934	1.6818	0.85252
1.40	2.63590	1.18269	1.5614	0.71613
1.44	2.64905 ·	1.06567	1.4306	0.60486
1.48	2.65137	0.94028	1.3018	0.51088
1.52	2.64645	0.80835	1.1834	0.42732
1.56	2.63758	0.67153	1.0806	0.34924
1.60	2.62763 ·	0.53118	0.99660	0.27359
1.64	2.61883	0.38839	0.93260	0.19883
1.68	2.61284	0.24402	0.88926	0.12433
1.72	2.61075 ·	+ 0.09872	0.86658	— 0.05006
1.76	2.61315	— 0.04696	0.86455	+ 0.02368
1.80	2.62012	0.19256 ·	0.88320	0.09652
1.84	2.63125	0.33759	0.92276	0.16806
1.88	2.64562 ·	0.48146	0.98332	0.23807
1.92	2.66176	0.62345	1.0651	0.30681
1.96	2.67756	0.76263	1.1672	0.37539
2.00	2.69029	0.89784 ·	1.2876	0.44636
2.04	2.69660 ·	1.02769	1.4227	0.52447
2.08	2.69267 ·	1.15053	1.5660	0.61700
2.12	2.67453 ·	1.26460	1.7072	0.73377
2.16	2.63845	1.36810	1.8320	0.88560
2.20	2.58171	1.45939 ·	1.9216	1.0810
2.24	+ 2.50300 ·	— 1.53723	— 1.9538	+ 1.3223

ψ	E	F	ξ	η
2.28	+ 2.40310	- 1.60086	- 1.9075	+ 1.6006
2.32	2.28475	1.65030	1.7682	1.8957
2.36	2.15225	1.68624	1.5336	2.1785
2.40	2.01064	1.71018	1.2158	2.4199
2.44	1.86455	1.72384	0.83746	2.5976
2.48	1.71766	1.72925	0.42538	2.7002
2.52	1.57230	1.72793	- 0.00437	2.7257
2.56	1.42988	1.72068	+ 0.40501	2.6778
2.60	1.29145	1.70753	0.78536	2.5636
2.64	1.15843	1.68749	1.1203	2.3917
2.68	1.03303	1.65918	1.3946	2.1749
2.72	0.91816	1.62103	1.5959	1.9309
2.76	0.81703	1.57171	1.7187	1.6795
2.80	+ 0.73245	- 1.51036	+ 1.7656	+ 1.4402

Bahn 36.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.42.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79808	+ 0.12877	0.70387	- 0.09246
0.08	0.79249	0.25718	0.72542	0.18517
0.12	0.78367	0.38483	0.76140	0.27840
0.16	0.77239	0.51119	0.81188	0.37248
0.20	0.75978	0.63558	0.87644	0.46784
0.24	0.74734	0.75713	0.95398	0.56521
0.28	0.73693	0.87476	1.0424	0.66577
0.32	0.73073	0.98718	1.1380	0.77120
0.36	0.73111	1.09296	1.2351	0.88400
0.40	0.74040	1.19060	1.3262	1.0068
0.44	0.76058	1.27867	1.4019	1.1421
0.48	0.79294	1.35597	1.4520	1.2905
0.52	+ 0.83774	+ 1.42165	+ 1.4672	- 1.4501

ψ	E	F	ξ	η
0.56	+ 0.89412	+ 1.47544	+ 1.4408	— 1.6156
0.60	0.96013	1.51767	1.3707	1.7788
0.64	1.03310	1.54936	1.2601	1.9308
0.68	1.11021	1.57211	1.1166	2.0644
0.72	1.18899	1.58796	0.94975	2.1759
0.76	1.26783	1.59913	0.76837	2.2652
0.80	1.34620	1.60777	0.57818	2.3354
0.84	1.42465	1.61569	0.38081	2.3906
0.88	1.50469	1.62414	+ 0.17410	2.4332
0.92	1.58840	1.63361	— 0.04680	2.4632
0.96	1.67805	1.64373	0.28729	2.4763
1.00	1.77553	1.65320	0.55046	2.4636
1.04	1.88176	1.65988	0.83362	2.4127
1.08	1.99610	1.66094	1.1252	2.3112
1.12	2.11590	1.65325	1.4040	2.1516
1.16	2.23662	1.63381	1.6427	1.9378
1.20	2.35236	1.60021	1.8159	1.6865
1.24	2.45704	1.55097	1.9089	1.4240
1.28	2.54559	1.48556	1.9216	1.1763
1.32	2.61492	1.40446	1.8668	0.96208
1.36	2.66427	1.30888	1.7641	0.78828
1.40	2.69502	1.20055	1.6339	0.65233
1.44	2.71003	1.08152	1.4934	0.54589
1.48	2.71304	0.95384	1.3557	0.45928
1.52	2.70786	0.81945	1.2295	0.38423
1.56	2.69812	0.68006	1.1203	0.31482
1.60	2.68683	0.53706	1.0311	0.24740
1.64	2.67642	0.39159	0.96316	0.18019
1.68	2.66866	0.24452	0.91696	0.11249
1.72	2.66470	+ 0.09653	0.89258	— 0.04438
1.76	2.66517	— 0.05180	0.88982	+ 0.02377
1.80	2.67014	0.19998	0.90880	0.09143
1.84	2.67915	0.34747	0.94956	0.15795
1.88	+ 2.69121	— 0.49365	— 1.0122	+ 0.22372

ψ	E	F	ξ	η
1.92	+ 2.70472	- 0.63771	- 1.0967	+ 0.28848
1.96	2.71743	0.77865	1.2019	0.35385
2.00	2.72644	0.91518	1.3257	0.42284
2.04	2.72826	1.04573	1.4639	0.50090
2.08	2.71896	1.16853	1.6088	0.59606
2.12	2.69455	1.28148	1.7492	0.71853
2.16	2.65165	1.38268	1.8690	0.87872
2.20	2.58803	1.47028	1.9481	1.0831
2.24	2.50343	1.54287	1.9645	1.3298
2.28	2.39988	1.59973	1.8999	1.6044
2.32	2.28161	1.64099	1.7466	1.8819
2.36	2.15432	1.66769	1.5120	2.1328
2.40	2.02409	1.68180	1.2177	2.3326
2.44	1.89605	1.68595	0.89200	2.4696
2.48	1.77371	1.68295	0.56099	2.5445
2.52	1.65857	1.67549	- 0.24233	2.5671
2.56	1.55058	1.66550	+ 0.05536	2.5491
2.60	1.44864	1.65405	0.33018	2.4996
2.64	1.35141	1.64125	0.58274	2.4244
2.68	1.25785	1.62633	0.81304	2.3256
2.72	1.16767	1.60787	1.0185	2.2039
2.76	1.08151	1.58409	1.1938	2.0609
2.80	+ 1.00102	- 1.55309	+ 1.3318	+ 1.9007

Bahn 37.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.428.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79808	+ 0.12874	0.70387	- 0.09244
0.08	0.79247	0.25713	0.72542	0.18512
0.12	0.78363	0.38475	0.76143	0.27832
0.16	+ 0.77233	+ 0.51108	+ 0.81190	- 0.37237

ψ	E	F	ξ	η
0.20	+ 0.75968	+ 0.63543	+ 0.87644	— 0.46766
0.24	0.74718 ·	0.75693	0.95403	0.56493
0.28	0.73671	0.87450 ·	1.0424	0.66535
0.32	0.73042	0.98686 ·	1.1381	0.77062
0.36	0.73068 ·	1.09258 ·	1.2352	0.88314
0.40	0.73983	1.19016	1.3264	1.0056
0.44	0.75982 ·	1.27816 ·	1.4023	1.1405
0.48	0.79194 ·	1.35539	1.4527	1.2884
0.52	0.83646	1.42101 ·	1.4684	1.4474
0.56	0.89249	1.47475 ·	1.4428	1.6122
0.60	0.95810	1.51697	1.3738	1.7749
0.64	1.03063 ·	1.54867 ·	1.2646	1.9265
0.68	1.10727 ·	1.57149 ·	1.1226	2.0600
0.72	1.18558 ·	1.58747	0.95740	2.1717
0.76	1.26398	1.59885	0.77762	2.2618
0.80	1.34196 ·	1.60780	0.58890	2.3333
0.84	1.42016	1.61615	0.39260	2.3901
0.88	1.50012	1.62515 ·	+ 0.18629	2.4350
0.92	1.58402 ·	1.63533	— 0.03523	2.4679
0.96	1.67424	1.64631	0.27780	2.4842
1.00	1.77278	1.65677 ·	0.54499	2.4745
1.04	1.88067 ·	1.66454	0.83442	2.4257
1.08	1.99732	1.66670	1.1343	2.3242
1.12	2.12007	1.66003 ·	1.4225	2.1619
1.16	2.24420 ·	1.64145	1.6703	1.9421
1.20	2.36360	1.60849	1.8507	1.6827
1.24	2.47187 ·	1.55961 ·	1.9471	1.4112
1.28	2.56368	1.49431 ·	1.9603	1.1559
1.32	2.63571	1.41305	1.9034	0.93644
1.36	2.68710	1.31708	1.7971	0.76064
1.40	2.71920	1.20820 ·	1.6629	0.62489
1.44	2.73495	1.08848 ·	1.5184	0.52071
1.48	2.73815	0.96003	1.3772	0.43752
1.52	+ 2.73276	+ 0.82480	— 1.2478	— 0.36635

ψ	E	F	ξ	η
1.56	+ 2.72247 ·	+ 0.68451 ·	— 1.1359	— 0.30084
1.60	2.71042 ·	0.54060	1.0445	0.23711
1.64	2.69909 ·	0.39419 ·	0.97480	0.17320
1.68	2.69030 ·	0.24619	0.92730	0.10846
1.72	2.68526	+ 0.09727	0.90192	— 0.04293
1.76	2.68459	— 0.05199	0.89860	+ 0.02295
1.80	2.68836 ·	0.20107	0.91724	0.08864
1.84	+ 2.69614	— 0.34942	— 0.95808	+ 0.15364

Bahn 38.

Periodisch (unsymmetrisch).

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.4281.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.6967	0.0000
0.04	0.79808	+ 0.12874 ·	0.7039	— 0.0924 ·
0.08	0.79247 ·	0.25713	0.7254	0.1851
0.12	0.78363 ·	0.38475	0.7614 ·	0.2783 ·
0.16	0.77233	0.51108	0.8119	0.3723 ·
0.20	0.75968	0.63543	0.8764	0.4676 ·
0.24	0.74718 ·	0.75693	0.9540	0.5649 ·
0.28	0.73671	0.87450	1.0424	0.6653 ·
0.32	0.73041 ·	0.98686	1.1380	0.7706
0.36	0.73068	1.09258	1.2352	0.8831 ·
0.40	0.73982 ·	1.19015 ·	1.3264	1.0056
0.44	0.75981 ·	1.27816	1.4023	1.1404
0.48	0.79193 ·	1.35538 ·	1.4527	1.2883
0.52	0.83644 ·	1.42101	1.4684	1.4473
0.56	0.89247	1.47474 ·	1.4428	1.6122
0.60	0.95807 ·	1.51696	1.3738	1.7748
0.64	1.03060 ·	1.54866 ·	1.2646	1.9265
0.68	1.10724	1.57149	1.1227	2.0600
0.72	1.18554 ·	1.58746 ·	0.9575	2.1716
0.76	+ 1.26393 ·	+ 1.59884 ·	+ 0.7777 ·	— 2.2617

ψ	E	F	ξ	η
0.80	+ 1.34191 ·	+ 1.60780	+ 0.5890	— 2.3332
0.84	1.42010 ·	1.61615 ·	0.3927 ·	2.3901
0.88	1.50006 ·	1.62516 ·	+ 0.1864 ·	2.4350
0.92	1.58397 ·	1.63535	— 0.0351	2.4680
0.96	1.67419 ·	1.64634	0.2777	2.4842
1.00	1.77275	1.65681 ·	0.5449	2.4746
1.04	1.88066	1.66459 ·	0.8344	2.4258
1.08	1.99733 ·	1.66677	1.1344	2.3243
1.12	2.12012	1.66011 ·	1.4227	2.1620
1.16	2.24429 ·	1.64154	1.6705	1.9422
1.20	2.36373	1.60858 ·	1.8508	1.6826
1.24	2.47205	1.55971 ·	1.9476	1.4111
1.28	2.56389 ·	1.49442	1.9607	1.1556
1.32	2.63595 ·	1.41315	1.9038	0.9361 ·
1.36	2.68737	1.31717 ·	1.7975	0.7602 ·
1.40	2.71948 ·	1.20829 ·	1.6632	0.6245 ·
1.44	2.73524 ·	1.08856 ·	1.5187	0.5204
1.48	2.73844 ·	0.96010 ·	1.3774	0.4373 ·
1.52	2.73305 ·	0.82486 ·	1.2480	0.3661
1.56	2.72276	0.68456 ·	1.1361	0.3006 ·
1.60	2.71070	0.54064	1.0446	0.2370
1.64	2.69936	0.39422 ·	0.9749 ·	0.1731
1.68	2.69056	0.24621	0.9274	0.1084
1.72	2.68550	+ 0.09728	0.9020 ·	— 0.0429
1.76	2.68482	— 0.05199	0.8987	+ 0.0229
1.80	2.68858	0.20108 ·	0.9173 ·	0.0886
1.84	+ 2.69634	— 0.34944 ·	— 0.9581 ·	+ 0.1536

Bahn 39.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 11.5.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	+ 0.79805	+ 0.12851	+ 0.70388	— 0.09227

ψ	E	F	ξ	η
0.08	+ 0.79234	+ 0.25665	+ 0.72543	- 0.18474
0.12	0.78332	0.38401	0.76145	0.27768
0.16	0.77175	0.51004	0.81193	0.37133
0.20	0.75875	0.63405	0.87654	0.46606
0.24	0.74579	0.75515	0.95414	0.56251
0.28	0.73470	0.87227	1.0427	0.66176
0.32	0.72762	0.98410	1.1385	0.76542
0.36	0.72686	1.08924	1.2362	0.87570
0.40	0.73467	1.18618	1.3283	0.99515
0.44	0.75295	1.27353	1.4058	1.1261
0.48	0.78292	1.35011	1.4592	1.2692
0.52	0.82478	1.41517	1.4797	1.4226
0.56	0.87765	1.46851	1.4610	1.5818
0.60	0.93960	1.51055	1.4015	1.7392
0.64	1.00810	1.54243	1.3043	1.8871
0.68	1.08048	1.56589	1.1763	2.0193
0.72	1.15451	1.58308	1.0261	2.1331
0.76	1.22889	1.59639	0.86132	2.2294
0.80	1.30349	1.60813	0.68590	2.3115
0.84	1.37937	1.62032	0.49964	2.3841
0.88	1.45871	1.63437	0.29760	2.4502
0.92	1.54451	1.65094	+ 0.07100	2.5091
0.96	1.64017	1.66969	- 0.19060	2.5549
1.00	1.74887	1.68916	0.49594	2.5737
1.04	1.87277	1.70674	0.84650	2.5442
1.08	2.01195	1.71886	1.2292	2.4410
1.12	2.16356	1.72146	1.6122	2.2451
1.16	2.32150	1.71063	1.9486	1.9567
1.20	2.47716	1.68342	2.1924	1.6027
1.24	2.62103	1.63805	2.3161	1.2312
1.28	2.74487	1.57418	2.3214	0.89250
1.32	2.84315	1.49255	2.2334	0.62096
1.36	2.91373	1.39476	2.0856	0.42763
1.40	+ 2.95770	+ 1.28309	- 1.9097	- 0.30452

ψ	E	F	ξ	η
1.44	+ 2.97832	+ 1.15996 ·	— 1.7284	— 0.23377
1.48	2.98024 ·	1.02784	1.5559	0.19577
1.52	2.96839 ·	0.88884	1.4005	0.17424
1.56	2.94743	0.74475	1.2661	0.15735
1.60	2.92138 ·	0.59697 ·	1.1550	0.13828
1.64	2.89354 ·	0.44664	1.0677	0.11334
1.68	2.86637	0.29462	1.0044	0.08123
1.72	2.84160 ·	+ 0.14161	0.96494	— 0.04199
1.76	2.82029	— 0.01179	0.94888	+ 0.00373
1.80	2.80283	0.16498	0.95605	0.05508
1.84	2.78901	0.31730	0.98610	0.11142
1.88	2.77798 ·	0.46792 ·	1.0388	0.17256
1.92	2.76830 ·	0.61579	1.1133	0.23902
1.96	2.75785	0.75948	1.2078	0.31249
2.00	2.74390	0.89720	1.3186	0.39601
2.04	2.72329 ·	1.02669 ·	1.4392	0.49428
2.08	2.69276	1.14532 ·	1.5593	0.61297
2.12	2.64954 ·	1.25020	1.6647	0.75697
2.16	2.59212 ·	1.33842 ·	1.7377	0.92715
2.20	2.52115	1.40746 ·	1.7616	1.1165
2.24	2.43992 ·	1.45567 ·	1.7264	1.3085
2.28	2.35417	1.48259 ·	1.6341	1.4799
2.32	2.27121 ·	1.48931	1.5016	1.6088
2.36	2.19840	1.47848 ·	1.3548	1.6829
2.40	2.14169	1.45397 ·	1.2196	1.7024
2.44	2.10493	1.42037	1.1150	1.6771
2.48	2.08970	1.38234	1.0501	1.6210
2.52	2.09570	1.34433	1.0264	1.5468
2.56	2.12159	1.31020	1.0406	1.4644
2.60	2.16515 ·	1.28324	1.0879	1.3800
2.64	2.22367	1.26619	1.1631	1.2969
2.68	2.29423 ·	1.26131	1.2622	1.2168
2.72	+ 2.37348	— 1.27062 ·	— 1.3823	+ 1.1403

ψ	E	F	ξ	η
2.76	+ 2.45748 ·	— 1.29609	— 1.5223	+ 1.0682
2.80	2.54127 ·	1.33995 ·	1.6836	1.0047
2.84	2.61808	1.40521	1.8714	0.95764
2.88	+ 2.67778	— 1.49629 ·	— 2.0968	+ 0.94864

Bahn 40.

$$E_0 = + 0.8. F_0 = 0. K = 12.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.80000	0.00000	+ 0.69671	0.00000
0.04	0.79781 ·	+ 0.12688 ·	0.70390	— 0.09107
0.08	0.79139 ·	0.25333	0.72552	0.18213
0.12	0.78116	0.37883 ·	0.76166	0.27317
0.16	0.76780 ·	0.50278 ·	0.81230	0.36411
0.20	0.75236 ·	0.62441 ·	0.87708	0.45497
0.24	0.73617	0.74277 ·	0.95506	0.54589
0.28	0.72087 ·	0.85673 ·	1.0442	0.63725
0.32	0.70835	0.96498	1.1413	0.72988
0.36	0.70056 ·	1.06611 ·	1.2417	0.82505
0.40	0.69938	1.15874	1.3391	0.92444
0.44	0.70622 ·	1.24159	1.4266	1.0293
0.48	0.72188 ·	1.31379	1.4970	1.1404
0.52	0.74626 ·	1.37485	1.5446	1.2565
0.56	0.77831	1.42496	1.5660	1.3751
0.60	0.81628	1.46503 ·	1.5612	1.4924
0.64	0.85808	1.49666	1.5336	1.6050
0.68	0.90170 ·	1.52213	1.4888	1.7114
0.72	0.94590	1.54421	1.4326	1.8129
0.76	0.99063	1.56606	1.3695	1.9148
0.80	1.03721 ·	1.59093	1.3001	2.0252
0.84	1.08909	1.62221 ·	1.2189	2.1565
0.88	1.15205	1.66310	1.1111	2.3234
0.92	+ 1.23510 ·	+ 1.71637 ·	+ 0.94608	— 2.5420

ψ	E	F	ξ	η
0.96	+ 1.35148 ·	+ 1.78403 ·	+ 0.66593	— 2.8236
0.98	1.42779 ·	1.82338 ·	0.45279	2.9849
1.00	1.52000 ·	1.86618 ·	+ 0.16800	3.1504
1.02	1.63140	1.91189 ·	— 0.20938	3.3029
1.04	1.76552	1.95965 ·	0.70023	3.4122
1.06	1.92589 ·	2.00833 ·	1.3186	3.4301
1.08	2.11564 ·	2.05663 ·	2.0595	3.2891
1.10	2.33711 ·	2.10336 ·	2.8834	2.9076
1.12	+ 2.59164 ·	+ 2.14805 ·	— 3.7021	— 2.2086

Bahn 41.

 $\xi_0 = +0.67$. $\eta_0 = 0$. $K = 11.2$.

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	+ 0.67000	0.00000	0.46	+ 1.23801	— 1.03399 ·
0.02	0.67541	— 0.08496 ·	0.50	1.26510 ·	1.08448
0.04	0.69080 ·	0.16685	0.58	1.30731 ·	1.18056 ·
0.06	0.71412 ·	0.24348 ·	0.66	1.33522 ·	1.27131 ·
0.08	0.74292 ·	0.31392 ·	0.74	1.35056	1.35753 ·
0.10	0.77502 ·	0.37815 ·	0.82	1.35480	1.43960 ·
0.12	0.80878	0.43667	0.90	1.34925	1.51771
0.14	0.84303 ·	0.49017	0.98	1.33502 ·	1.59182 ·
0.16	0.87701 ·	0.53936 ·	1.06	1.31315	1.66193
0.18	0.91022 ·	0.58490	1.22	1.25009 ·	1.78990 ·
0.20	0.94236 ·	0.62734	1.38	1.16664	1.90121 ·
0.22	0.97325	0.66715	1.54	1.06833	1.99574 ·
0.24	1.00277 ·	0.70472 ·	1.70	0.95993	2.07378 ·
0.26	1.03090	0.74039 ·	1.86	0.84543 ·	2.13623
0.30	1.08288	0.80704	2.02	0.72816	2.18411 ·
0.34	1.12930	0.86872 ·	2.18	0.61078 ·	2.21893
0.38	1.17042	0.92662	2.34	0.49516	2.24229 ·
0.42	+ 1.20655	— 0.98151 ·	2.50	0.38283	2.25587
			2.66	0.27458 ·	2.26136
			2.82	0.17079	2.26025
			2.98	+ 0.07142 ·	— 2.25389

t	ξ	η	t	ξ	η
3.14	-0.02388	-2.24329	0.04	+0.69084	-0.16616
3.30	0.11564	2.22916	0.06	0.71424	0.24246
3.46	0.20453	2.21198	0.08	0.74318	0.31256
3.62	0.29121	2.19169	0.10	0.77549	0.37643
3.78	0.37623	2.16805	0.12	0.80951	0.43453
3.94	0.45993	2.14045	0.14	0.84407	0.48758
4.10	0.54237	2.10805	0.16	0.87839	0.53626
4.26	0.62324	2.06985	0.18	0.91198	0.58124
4.42	0.70174	2.02465	0.20	0.94452	0.62307
4.58	0.77661	1.97128	0.22	0.97583	0.66224
4.74	0.84598	1.90853	0.24	1.00579	0.69913
4.90	0.90740	1.83529	0.26	1.03437	0.73407
5.06	0.95777	1.75057			
5.22	0.99327	1.65341	0.30	1.08730	0.79918
5.38	1.00935	1.54281	0.34	1.13472	0.85923
5.54	1.00061	1.41742	0.38	1.17690	0.91540
			0.42	1.21414	0.96851
5.62	0.98503	1.34846	0.46	1.24677	1.01916
5.70	0.96081	1.27470	0.50	1.27511	1.06777
5.78	0.92709	1.19540			
5.86	0.88297	1.10947	0.58	1.32001	1.16006
5.94	0.82770	1.01534	0.66	1.35092	1.24697
6.02	0.76090	0.91076	0.74	1.36961	1.32939
6.10	0.68291	0.79264	0.82	1.37756	1.40774
6.18	0.59569	0.65711	0.90	1.37609	1.48223
6.26	0.50389	0.50064	0.98	1.36633	1.55293
6.34	0.41515	0.32292	1.06	1.34932	1.61985
6.42	0.33690	-0.13096	1.22	1.29716	1.74235
6.50	-0.26949	+0.06054	1.38	1.22601	1.84967
			1.54	1.14128	1.94210
			1.70	1.04739	2.02032
			1.86	0.94800	2.08542
			2.02	0.84593	2.13887
			2.18	0.74326	2.18230
			2.34	+0.64137	-2.21749

Bahn 42.
 $\xi_0 = +0.67$. $\eta_0 = 0$. $K = 11.35$.

t	ξ	η
0.00	+0.67000	0.00000
0.02	+0.67541	-0.08461

t	ξ	η	t	ξ	η
2.50	+ 0.54095	— 2.24619	6.50	— 1.14354	— 0.43420
2.66	0.44209	2.27004	6.52	1.08940	0.38888
2.82	0.34439	2.29040	6.54	1.03119	0.33597
2.98	0.24701	2.30834	6.55	1.00071	0.30547
3.14	0.14882	2.32451	6.56	0.96959	0.27129
3.30	+ 0.04850	2.33913	6.57	0.93840	0.23239
3.46	— 0.05529	2.35189	6.58	0.90821	0.18741
3.62	0.16384	2.36205	6.59	0.88123	0.13481
3.78	0.27821	2.36843	6.60	0.86147	0.07390
3.94	0.39905	2.36937	6.61	— 0.85459	— 0.00585
4.10	0.52665	2.36293			
4.26	0.66065	2.34692			
4.42	0.80005	2.31904			
4.58	0.94313	2.27701			
4.74	1.08744	2.21876			
4.90	1.22970	2.14252			
5.06	1.36587	2.04704			
5.22	1.49117	1.93178			
5.38	1.60003	1.79697			
5.54	1.68613	1.64381			
5.70	1.74235	1.47445			
5.86	1.76035	1.29199			
5.94	1.75193	1.19697			
6.02	1.72990	1.10000			
6.10	1.69239	1.00141			
6.18	1.63702	0.90127			
6.26	1.56062	0.79900			
6.34	1.45855	0.69267			
6.38	1.39580	0.63653			
6.42	1.32361	0.57678			
6.44	1.28346	0.54483			
6.46	1.24027	0.51092			
6.48	— 1.19374	— 0.47438			

Bahn 43.
 $\xi_0 = +0.67$, $\eta_0 = 0$, $K = 11.4$.

t	ξ	η
0.00	+ 0.67000	0.00000
0.02	0.67542	— 0.08450
0.04	0.69086	0.16593
0.06	0.71429	0.24212
0.08	0.74327	0.31211
0.10	0.77565	0.37585
0.12	0.80975	0.43381
0.14	0.84442	0.48670
0.16	0.87886	0.53522
0.18	0.91258	0.58001
0.20	0.94526	0.62164
0.22	0.97670	0.66058
0.24	1.00681	0.69724
0.26	1.03553	0.73194
0.30	1.08878	0.79654
0.34	1.13654	0.85604
0.38	1.17907	0.91163
0.42	+ 1.21669	— 0.96414

t	ξ	η	t	ξ	η
0.46	+ 1.24971	- 1.01418	3.94	- 0.37369	- 2.44315
0.50	1.27845	1.06216	4.10	0.51534	2.44536
0.54	1.30321	1.10842	4.26	0.66592	2.43658
0.58	1.32426	1.15315	4.42	0.82433	2.41437
0.66	1.35616	1.23878	4.58	0.98869	2.37576
0.74	1.37595	1.31991	4.74	1.15631	2.31841
0.82	1.38513	1.39699	4.90	1.32365	2.24026
0.90	1.38502	1.47025	5.06	1.48636	2.13985
0.98	1.37674	1.53978	5.22	1.63936	2.01660
1.06	1.36135	1.60561	5.38	1.77690	1.87079
1.22	1.31278	1.72618	5.54	1.89259	1.70397
1.38	1.24573	1.83208	5.70	1.97955	1.51895
1.54	1.16549	1.92367	5.86	2.03030	1.32065
1.70	1.07644	2.00177	6.02	2.03657	1.11286
1.86	0.98207	2.06761	6.18	1.98842	0.90465
2.02	0.88511	2.12269	6.26	1.94002	0.80265
2.18	0.78743	2.16878	6.34	1.87242	0.70336
2.34	0.69021	2.20769	6.42	1.78236	0.60744
2.50	0.59393	2.24121	6.50	1.66457	0.51532
2.66	0.49843	2.27096	6.54	1.59283	0.47001
2.82	0.40305	2.29830	6.58	1.51028	0.42444
2.98	0.30669	2.32418	6.62	1.41417	0.37703
3.14	0.20797	2.34916	6.66	1.29994	0.32429
3.30	+ 0.10532	2.37326	6.68	1.23361	0.29334
3.46	- 0.00283	2.39596	6.70	1.15903	0.25628
3.62	0.11799	2.41631	6.72	1.07349	0.20665
3.78	- 0.24134	- 2.43269	6.74	- 0.97488	- 0.12731

Bahn 44.

$$E_0 = + 0.87. F_0 = 0. K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.87000	0.00000	+ 0.64483	0.00000
0.04	+ 0.86849	+ 0.12490	+ 0.65103	- 0.09560

ψ	E	F	ξ	η
0.08	+ 0.86408 ·	+ 0.24952	+ 0.66965	— 0.19173
0.12	0.85720	0.37350	0.70077	0.28898
0.16	0.84853	0.49639 ·	0.74423	0.38795
0.20	0.83909 ·	0.61759	0.79965	0.48929
0.24	0.83025	0.73630	0.86598	0.59392
0.28	0.82368 ·	0.85150 ·	0.94110	0.70299
0.32	0.82140	0.96197	1.0214	0.81802
0.36	0.82556	1.06626 ·	1.1016	0.94076
0.40	0.83833	1.16282 ·	1.1741	1.0730
0.44	0.86157	1.25007	1.2299	1.2157
0.48	0.89645 ·	1.32653	1.2592	1.3680
0.52	0.94318	1.39100 ·	1.2530	1.5258
0.56	1.00071 ·	1.44275	1.2059	1.6820
0.60	1.06683	1.48159 ·	1.1172	1.8270
0.64	1.13834	1.50800	0.99308	1.9504
0.68	1.21163 ·	1.52309	0.84436	2.0448
0.72	1.28323	1.52850	0.68467	2.1070
0.76	1.35027	1.52621	0.52696	2.1386
0.80	1.41078	1.51831 ·	0.38108	2.1449
0.84	1.46378 ·	1.50684 ·	0.25281	2.1331
0.88	1.50912 ·	1.49355 ·	0.14414	2.1101
0.92	1.54733 ·	1.47991	+ 0.05419	2.0819
0.96	1.57937	1.46699	— 0.01958	2.0527
1.00	1.60646 ·	1.45553 ·	0.08060	2.0254
1.04	1.62993	1.44595	0.13243	2.0017
1.08	1.65108	1.43834 ·	0.17851	1.9818
1.12	1.67114	1.43255 ·	0.22179	1.9654
1.16	1.69114	1.42819 ·	0.26477	1.9515
1.20	1.71193 ·	1.42465	0.30926	1.9384
1.24	1.73409	1.42116	0.35629	1.9243
1.28	1.75788 ·	1.41681	0.40609	1.9069
1.32	1.78322	1.41057	0.45782	1.8839
1.36	+ 1.80967 ·	+ 1.40141	— 0.50958	— 1.8532

Bahn 45.

Periodisch (symmetrisch).

$$E_0 = + 0.87. F_0 = 0. K = 11.19942.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.87000	0.00000	+ 0.64483	0.00000
0.04	0.86843	+ 0.12453	0.65104	— 0.09530
0.08	0.86389	0.24876	0.66968	0.19111
0.12	0.85675	0.37232	0.70081	0.28791
0.16	0.84770	0.49475	0.74435	0.38627
0.20	0.83776	0.61544	0.79990	0.48679
0.24	0.82823	0.73357	0.86642	0.59024
0.28	0.82077	0.84813	0.94190	0.69765
0.32	0.81733	0.95788	1.02277	0.81044
0.36	0.81999	1.06141	1.10397	0.93018
0.40	0.83086	1.15717	1.17831	1.05849
0.44	0.85168	1.24364	1.23726	1.19625
0.48	0.88355	1.31942	1.27153	1.34267
0.52	0.92664	1.38341	1.27288	1.49438
0.56	0.97993	1.43498	1.23609	1.64493
0.60	1.04130	1.47410	1.16076	1.78575
0.64	1.10777	1.50138	1.05202	1.90796
0.68	1.17600	1.51807	0.91973	2.00509
0.72	1.24285	1.52594	0.77573	2.07429
0.76	1.30582	1.52706	0.63138	2.11714
0.80	1.36329	1.52365	0.49516	2.13865
0.84	1.41464	1.51776	0.37178	2.14500
0.88	1.46014	1.51126	0.26244	2.14275
0.92	1.50069	1.50561	0.16562	2.13724
0.96	1.53775	1.50188	+ 0.07787	2.13250
1.00	1.57305	1.50068	— 0.00532	2.13090
1.04	+ 1.60848	+ 1.50222	— 0.08880	— 2.13300

Bahn 46.

$$E_0 = +0.87. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.2.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.87000	0.00000	+ 0.64483	0.00000
0.04	0.86843 ·	+ 0.12453	0.65104	— 0.09530
0.08	0.86389	0.24875 ·	0.66968	0.19110
0.12	0.85674 ·	0.37231 ·	0.70083	0.28791
0.16	0.84770	0.49474 ·	0.74437	0.38625
0.20	0.83775	0.61543	0.79990	0.48677
0.24	0.82822	0.73356	0.86642	0.59023
0.28	0.82076	0.84811 ·	0.94188	0.69763
0.32	0.81731	0.95786	1.0228	0.81040
0.36	0.81997	1.06138	1.1040	0.93012
0.40	0.83082	1.15714	1.1783	1.0584
0.44	0.85162	1.24360 ·	1.2373	1.1962
0.48	0.88347 ·	1.31938	1.2716	1.3425
0.52	0.92654 ·	1.38336 ·	1.2730	1.4942
0.56	0.97981 ·	1.43494	1.2363	1.6447
0.60	1.04115	1.47405 ·	1.1610	1.7855
0.64	1.10759	1.50134 ·	1.0525	1.9077
0.68	1.17579	1.51804 ·	0.92018	2.0048
0.72	1.24262	1.52593	0.77628	2.0741
0.76	1.30556	1.52707	0.63197	2.1170
0.80	1.36301 ·	1.52368	0.49550	2.1386
0.84	1.41437	1.51783	0.37245	2.1451
0.88	1.45985 ·	1.51137	0.26315	2.1429
0.92	1.50042 ·	1.50577	0.16627	2.1376
0.96	1.53751	1.50208 ·	+ 0.07845	2.1330
1.00	1.57286	1.50095 ·	— 0.00486	2.1315
1.04	1.60835 ·	1.50256	0.08854	2.1338
1.08	+ 1.64587	+ 1.50665 ·	— 0.17750	— 2.1389

Bahn 47.

$$E_0 = + 0.9. F_0 = 0. K = 10.9.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89871	+ 0.12356	0.62738	— 0.09694
0.08	0.89497	0.24686	0.64470	0.19456
0.12	0.88918	0.36959	0.67357	0.29359
0.16	0.88201	0.49132	0.71385	0.39475
0.20	0.87447	0.61147	0.76510	0.49891
0.24	0.86788	0.72929	0.82612	0.60710
0.28	0.86388	0.84377	0.89472	0.72048
0.32	0.86444	0.95367	0.96730	0.84058
0.36	0.87170	1.05755	1.0382	0.96904
0.40	0.88776	1.15376	1.0999	1.1071
0.44	0.91446	1.24059	1.1432	1.2551
0.48	0.95291	1.31640	1.1581	1.4109
0.52	1.00321	1.37974	1.1358	1.5693
0.56	1.06412	1.42958	1.0716	1.7214
0.60	1.13308	1.46542	0.96648	1.8560
0.64	1.20651	1.48747	0.82868	1.9621
0.68	1.28025	1.49661	0.67183	2.0324
0.72	1.35026	1.49436	0.51199	2.0648
0.76	1.41312	1.48263	0.36363	2.0629
0.80	1.46641	1.46363	0.23721	2.0340
0.84	1.50875	1.43950	0.13814	1.9869
0.88	1.53965	1.41231	0.06770	1.9300
0.92	1.55938	1.38385	0.02419	1.8697
0.96	1.56865	1.35570	0.00444	1.8108
1.00	1.56846	1.32920	0.00472	1.7566
1.04	1.55996	1.30546	0.02146	1.7090
1.08	1.54435	1.28547	0.05147	1.6693
1.12	1.52283	1.27005	0.09209	1.6383
1.16	1.49660	1.25993	0.14117	1.6163
1.20	1.46687	1.25577	0.19686	1.6041
1.24	+ 1.43491	+ 1.25817	+ 0.25761	— 1.6025

ψ	E	F	ξ	η
1.28	+ 1.40211	+ 1.26769	+ 0.32185	— 1.6123
1.32	1.37005 ·	1.28486	0.38791	1.6352
1.36	1.34070	1.31020 ·	0.45349	1.6733
1.40	1.31645	1.34422	0.51529	1.7297
1.44	1.30043	1.38739 ·	0.56815	1.8092
1.48	1.29672 ·	1.44016 ·	0.60333	1.9179
1.52	1.31090	1.50283	0.60607	2.0642
1.54	1.32690	1.53789	0.58796	2.1543
1.56	1.35034	1.57537	0.55101	2.2568
1.58	1.38253 ·	1.61515	0.48916	2.3722
1.60	1.42499	1.65703	0.39478	2.4997
1.62	1.47937	1.70068	0.25839	2.6364
1.64	1.54755 ·	1.74562	+ 0.06860	2.7767
1.66	1.63143	1.79117 ·	— 0.18674	2.9095
1.68	1.73288	1.83645	0.51911	3.0174
1.70	+ 1.85353 ·	+ 1.88034	— 0.93578	— 3.0745

Bahn 48.

$$E_0 = + 0.9. F_0 = 0. K = 11.1.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89861	+ 0.12276	0.62738	— 0.09630
0.08	0.89457 ·	0.24523	0.64476	0.19318
0.12	0.88827	0.36707	0.67373	0.29129
0.16	0.88035	0.48784	0.71418	0.39120
0.20	0.87177	0.60693	0.76567	0.49364
0.24	0.86379	0.72356 ·	0.82714	0.59941
0.28	0.85799	0.83673	0.89656	0.70952
0.32	0.85619	0.94520 ·	0.97048	0.82512
0.36	0.86040	1.04756	1.0439	0.94758
0.40	0.87257	1.14224	1.1099	1.0780
0.44	+ 0.89435	+ 1.22763	+ 1.1601	— 1.2166

ψ	E	F	ξ	η
0.48	+ 0.92674	+ 1.30224	+ 1.1857	- 1.3617
0.52	0.96976	1.36485	1.1792	1.5092
0.56	1.02227	1.41466	1.1362	1.6520
0.60	1.08199	1.45148	1.0574	1.7813
0.64	1.14574	1.47576	0.94908	1.8884
0.68	1.20995	1.48865	0.82208	1.9673
0.72	1.27122	1.49181	0.68911	2.0161
0.76	1.32675	1.48735	0.56194	2.0375
0.80	1.37465	1.47750	0.44925	2.0371
0.84	1.41396	1.46450	0.35584	2.0220
0.88	1.44463	1.45042	0.28308	1.9992
0.92	1.46728	1.43706	0.22969	1.9747
0.96	1.48306	1.42595	0.19285	1.9533
1.00	1.49348	1.41830	0.16885	1.9382
1.04	1.50029	1.41506	0.15356	1.9321
1.08	1.50546	1.41690	0.14255	1.9368
1.12	1.51111	1.42425	0.13108	1.9536
1.16	1.51956	1.43727	0.11387	1.9832
1.20	1.53329	1.45583	0.08476	2.0260
1.24	1.55498	1.47948	+ 0.03651	2.0812
1.28	1.58744	1.50735	- 0.03942	2.1464
1.32	1.63345	1.53804	0.15248	2.2160
1.36	1.69554	1.56957	0.31185	2.2804
1.40	1.77551	1.59922	0.52360	2.3240
1.44	1.87371	1.62361	0.78582	2.3262
1.48	1.98828	1.63888	1.0833	2.2648
1.52	2.11487	1.64114	1.3859	2.1250
1.56	2.24653	1.62708	1.6530	1.9087
1.60	2.37488	1.59445	1.8468	1.6382
1.64	2.49172	1.54232	1.9463	1.3498
1.68	2.59072	1.47107	1.9528	1.0794
1.72	2.66847	1.38211	1.8846	0.85034
1.76	2.72458	1.27753	1.7675	0.67013
1.80	+ 2.76109	+ 1.15984	- 1.6263	- 0.53405

ψ	E	F	ξ	η
1.84	+ 2.78159·	+ 1.03159	— 1.4797	— 0.43137
1.88	2.79034	0.89518·	1.3410	0.35083
1.92	2.79140	0.75272	1.2182	0.28333
1.96	2.78850	0.60592	1.1159	0.22258
2.00	2.78454	0.45614	1.0361	0.16501
2.04	2.78178	0.30442	0.97970	0.10885
2.08	+ 2.78174·	+ 0.15154	— 0.94670	— 0.05357

Bahn 49.

Periodisch (unsymmetrisch).

$$E_0 = + 0.9. F_0 = 0. K = 11.12687.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89860	+ 0.12265·	0.62740	— 0.09621
0.08	0.89452	0.24501	0.64477	0.19300
0.12	0.88815	0.36674	0.67374	0.29097
0.16	0.88013	0.48737	0.71422	0.39072
0.20	0.87140	0.60632·	0.76577	0.49294
0.24	0.86324	0.72279·	0.82729	0.59840
0.28	0.85720	0.83578·	0.89680	0.70804
0.32	0.85508·	0.94407	0.97095	0.82307
0.36	0.85889	1.04622·	1.04464	0.94474
0.40	0.87055	1.14069·	1.11114	1.07415
0.44	0.89167·	1.22589	1.16222	1.21143
0.48	0.92326	1.30034	1.18924	1.35513
0.52	0.96532	1.36283·	1.18474	1.50111
0.56	1.01672·	1.41263	1.14444	1.64263
0.60	1.07521·	1.44955·	1.06899	1.77105
0.64	1.13767	1.47409	0.96451	1.87798
0.68	1.20059	1.48743	0.84151	1.95761
0.72	1.26066	1.49126	0.71228	2.00819
0.76	+ 1.31514·	+ 1.48769	+ 0.58829	— 2.03221

ψ	E	F	ξ	η
0.80	+ 1.36224	+ 1.47900	+ 0.47789	— 2.03526
0.84	1.40106	1.46743	0.38586	2.02427
0.88	1.43164	1.45506	0.31333	2.00610
0.92	1.45469	1.44373	0.25907	1.98675
0.96	1.47147	1.43493	0.22001	1.97099
1.00	1.48361	1.42991	0.19232	1.96204
1.04	1.49306	1.42958	0.17149	1.96282
1.08	1.50200	1.43456	0.15246	1.97511
1.12	1.51279	1.44522	0.12979	2.00018
1.16	1.52807	1.46157	0.09705	2.03856
1.20	1.55061	1.48328	+ 0.04676	2.08981
1.24	1.58337	1.50960	— 0.02983	2.15181
1.28	1.62928	1.53920	0.14251	2.21937
1.32	1.69097	1.57017	0.30063	2.28316
1.36	1.77026	1.59990	0.51068	2.32821
1.40	1.86764	1.62517	0.77166	2.33442
1.44	1.98150	1.64233	1.07013	2.28003
1.48	2.10784	1.64771	1.37814	2.14916
1.52	2.24057	1.63802	1.65739	1.94055
1.56	2.37204	1.61082	1.86976	1.67246
1.60	2.49437	1.56477	1.99072	1.37854
1.64	2.60087	1.49977	2.01640	1.09577
1.68	2.68719	1.41681	1.96167	0.85185
1.72	2.75172	1.31769	1.85110	0.65886
1.76	2.79535	1.20467	1.70988	0.51514
1.80	2.82121	1.08021	1.55884	0.41031
1.84	2.83289	0.94669	1.41251	0.33255
1.88	2.83463	0.80628	1.28027	0.27090
1.92	2.83026	0.66081	1.16743	0.21749
1.96	2.82314	0.51177	1.07683	0.16732
2.00	2.81579	0.36032	1.00957	0.11784
2.04	2.81011	0.20739	0.96598	0.06800
2.08	2.80727	+ 0.05367	0.94600	— 0.01767
2.12	+ 2.80778	— 0.10022	— 0.94955	+ 0.03289

Bahn 50.

$$E_0 = +0.9. \quad F_0 = 0. \quad K = 11.2.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89856 ·	+ 0.12236	0.62740	— 0.09598
0.08	0.89438	0.24441 ·	0.64477	0.19250
0.12	0.88781 ·	0.36582	0.67380	0.29013
0.16	0.87952	0.48610	0.71435	0.38944
0.20	0.87042	0.60466 ·	0.76597	0.49102
0.24	0.86175	0.72070 ·	0.82766	0.59560
0.28	0.85504	0.83322	0.89748	0.70407
0.32	0.85207	0.94098	0.97208	0.81747
0.36	0.85477	1.04258 ·	1.0467	0.93696
0.40	0.86502 ·	1.13649 ·	1.1146	1.0636
0.44	0.88439	1.22115 ·	1.1680	1.1975
0.48	0.91379	1.29515	1.1988	1.3372
0.52	0.95324	1.35735 ·	1.1996	1.4792
0.56	1.00162 ·	1.40709 ·	1.1665	1.6170
0.60	1.05677	1.44430	1.1001	1.7429
0.64	1.11571 ·	1.46955	1.0058	1.8491
0.68	1.17512	1.48410 ·	0.89376	1.9305
0.72	1.23190	1.48975	0.77483	1.9855
0.76	1.28354 ·	1.48863	0.65966	2.0165
0.80	1.32844 ·	1.48308 ·	0.55600	2.0287
0.84	1.36595	1.47541	0.46800	2.0288
0.88	1.39629	1.46771 ·	0.39670	2.0232
0.92	1.42041 ·	1.46187	0.34052	2.0181
0.96	1.43991	1.45939 ·	0.29600	2.0181
1.00	1.45676	1.46151 ·	0.25855	2.0271
1.04	1.47340 ·	1.46909 ·	0.22246	2.0478
1.08	1.49257 ·	1.48264 ·	0.18095	2.0824
1.12	1.51738	1.50230 ·	0.12585	2.1316
1.16	1.55122 ·	1.52772	+ 0.04721	2.1949
1.20	1.59775	1.55801	— 0.06684	2.2686
1.24	+ 1.66063 ·	+ 1.59156	— 0.22945	— 2.3444

ψ	E	F	ξ	η
1.28	+ 1.74318	+ 1.62589 ·	− 0.45281	− 2.4068
1.32	1.84751 ·	1.65761 ·	0.74275	2.4319
1.36	1.97364 ·	1.68245	1.0908	2.3885
1.40	2.11838	1.69577 ·	1.4667	2.2486
1.44	2.27486	1.69327	1.8194	2.0021
1.48	2.43324 ·	1.67173	2.0920	1.6698
1.52	2.58269	1.62952 ·	2.2457	1.3006
1.56	2.71361 ·	1.56655	2.2740	0.95070
1.60	2.81955	1.48399	2.1994	0.66210
1.64	2.89795	1.38397	2.0580	0.45114
1.68	2.94973	1.26914	1.8842	0.31242
1.72	2.97829 ·	1.14238	1.7037	0.22883
1.76	2.98834 ·	1.00637 ·	1.5324	0.18090
1.80	2.98486 ·	0.86349 ·	1.3794	0.15216
1.84	2.97249 ·	0.71565 ·	1.2491	0.13099
1.88	2.95517 ·	0.56433 ·	1.1433	0.11023
1.92	2.93604 ·	0.41068	1.0627	0.08620
1.96	2.91741 ·	0.25553 ·	1.0070	0.05741
2.00	2.90085 ·	+ 0.09955 ·	0.97600	− 0.02371
2.04	2.88723	− 0.05670	0.96940	+ 0.01427
2.08	2.87674	0.21268 ·	0.98702	0.05609
2.12	+ 2.86896	− 0.36781	− 1.0289	+ 0.10129

Bahn 51.

$$E_0 = + 0.9. F_0 = 0. K = 11.24.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89854 ·	+ 0.12219 ·	0.62740	− 0.09585
0.08	0.89429 ·	0.24408 ·	0.64480	0.19223
0.12	0.88763	0.36531	0.67386	0.28966
0.16	0.87918 ·	0.48540	0.71440	0.38873
0.20	+ 0.86987 ·	+ 0.60375	+ 0.76608	− 0.48994

ψ	E	F	ξ	η
0.24	+ 0.86093	+ 0.71955	+ 0.82786	— 0.59406
0.28	0.85385 ·	0.83181 ·	0.89782	0.70187
0.32	0.85042	0.93929 ·	0.97268	0.81440
0.36	0.85252	1.04060	1.0477	0.93278
0.40	0.86201	1.13421	1.1164	1.0579
0.44	0.88041	1.21859	1.1711	1.1900
0.48	0.90863 ·	1.29235	1.2038	1.3276
0.52	0.94667	1.35440	1.2075	1.4673
0.56	0.99342 ·	1.40411 ·	1.1783	1.6031
0.60	1.04677	1.44146	1.1167	1.7274
0.64	1.10380	1.46708	1.0281	1.8332
0.68	1.16131	1.48227	0.92170	1.9153
0.72	1.21630	1.48885	0.80837	1.9724
0.76	1.26637 ·	1.48902	0.69815	2.0069
0.80	1.31006	1.48513 ·	0.59834	2.0237
0.84	1.34681	1.47952	0.51294	2.0295
0.88	1.37699	1.47432 ·	0.44268	2.0308
0.92	1.40172 ·	1.47143	0.38577	2.0335
0.96	1.42277 ·	1.47240	0.33842	2.0425
1.00	1.44238	1.47845	0.29545	2.0620
1.04	1.46338 ·	1.49042	0.25002	2.0947
1.08	1.48888 ·	1.50878 ·	0.19401	2.1428
1.12	1.52251	1.53349	0.11705	2.2067
1.16	1.56827 ·	1.56398 ·	+ 0.00628	2.2843
1.20	1.63039	1.59894 ·	— 0.15336	2.3686
1.24	1.71298 ·	1.63615 ·	0.37767	2.4454
1.28	1.81929	1.67231	0.67784	2.4895
1.32	1.95061	1.70308	1.0516	2.4652
1.36	2.10485 ·	1.72346	1.4717	2.3349
1.40	2.27573	1.72858 ·	1.8824	2.0775
1.44	2.45292 ·	1.71467	2.2139	1.7079
1.48	2.62403	1.67961	2.4115	1.2807
1.52	2.77730	1.62303	2.4601	0.86778
1.56	+ 2.90400	+ 1.54598 ·	— 2.3839	— 0.52717

ψ	E	F	ξ	η
1.60	+ 2.99969	+ 1.45057	— 2.2274	— 0.28506
1.64	3.06410	1.33958	2.0336	0.13762
1.68	3.10007	1.21605	1.8336	0.06388
1.72	3.11236	1.08291	1.6452	0.03821
1.76	3.10638	0.94265	1.4773	0.03833
1.80	3.08733	0.79729	1.3331	0.04797
1.84	3.05984	0.64833	1.2136	0.05673
1.88	3.02773	0.49688	1.1187	0.05881
1.92	2.99399	0.34374	1.0481	0.05155
1.96	2.96080	0.18953	1.0014	0.03429
2.00	2.92962	+ 0.03478	0.97820	— 0.00732
2.04	+ 2.90122	— 0.11997	— 0.97825	+ 0.02863

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 2.

ÜBER DIE URSPRÜNGLICHE BAHN DES KOMETEN 1907 I (GIACOBINI)

VON

ELIS STRÖMGREN und HANS Q. RASMUSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In einer Abhandlung in den Schriften der dänischen Akademie »Über den Ursprung der Kometen« (auch Publ. 19 des Kopenhagener Observatoriums) hat der Unterzeichnete (im Jahre 1914) die Prinzipien der Rückwärtsrechnung der Störungen einer parabelnahen Kometenbahn auseinandergesetzt und die Resultate der nach diesen Prinzipien für acht Kometen ausgeführten Rückwärtsrechnung mitgeteilt.

Aus der erwähnten Abhandlung zitieren wir die folgenden Sätze (l. c. Pag. 14 [202]):

»1. Von den zur Zeit vorliegenden Kometenbahnexzentrizitäten parabelnaher Bahnen können nur die wenigsten für kosmogonische Zwecke verwertet werden. In den meisten Fällen kann wegen der Unzulänglichkeit des Beobachtungsmaterials die nötige Genauigkeit nicht erreicht werden.

2. Die in den Kometenbahnverzeichnissen direkt gegebene oskulierende Exzentrizität kann bei Bahnen, die der Parabel sehr nahe kommen, nicht zu kosmogonischen Zwecken benutzt werden. Die Angabe der Umlaufzeit in den Kometenbahnverzeichnissen ist bei solchen Bahnen wertlos und irreführend.

3. Um einen reellen Nutzen aus der grossen Arbeit, welche eine Kometenbahnberechnung verursacht, ziehen zu können, ist es notwendig, die Bedingungsgleichungen für die Elementkorrekturen durch Berechnung der Störungen

zu verbessern, und zwar sind bei der Störungsrechnung die Planeten Jupiter und Saturn immer zu berücksichtigen.

4. Aus den auf diese Weise erhaltenen oskulierenden Elementen berechnet man durch Rückwärtsrechnung der Störungen, durch Reduktion wegen der Sonnenstörungen¹ und unter Berücksichtigung der Gesamtmasse der Sonne und der störenden Planeten einen Exzentrizitätswert, der, wenn die Rechnung genügend weit rückwärts geführt ist, die ursprüngliche Bahn des Kometen charakterisiert«.

Für die historische Entwicklung dieses Problems — u. a. die Anteilnahme der zwei französischen Astronomen FABRY und FAYET an dieser Entwicklung — wird auf die zitierte Abhandlung verwiesen, ebenso wie für die Formelsysteme, die bei der Berechnung anzuwenden sind.

Für sechs der in der zitierten Abhandlung behandelten acht Kometen hatte die definitive Bahnberechnung eine oskulierende Bahn gegeben, die schwach hyperbolisch war, für die übrigen zwei eine elliptische, die der Parabel sehr nahe kam. Die Rückwärtsrechnung der Störungen gab das

Tafel I.

Komet	Oskulierender Wert von		Mittlerer Fehler des oskulierenden $\frac{1}{a}$	Ursprünglicher Wert von $\frac{1}{a}$	Berechner
	e	$\frac{1}{a}$			
1853 III	1.0002514	—0.0008193	±0.0000228	+0.0000829	Büttner
1905 VI	1.0001846	—0.0001424	±0.0000501	+0.0006210	Michailow
1910 I	0.9999723	+0.0002143	±0.0001479	+0.0033021	Lous
1914 V	1.0001618	—0.0001465	±0.0000031	+0.0000119	Van Biesbroeck
1925 VII	1.0004276	—0.0002730	±0.0000226	+0.0001150	Van Biesbroeck

¹ Reduktion auf den Schwerpunkt des Systems.

Resultat, dass keine einzige verbürgte hyperbolische Bahn zurückblieb.

Nach 1914 ist nun von anderen Seiten nach denselben Prinzipien eine ähnliche Rückwärtsrechnung für weitere fünf Kometen ausgeführt worden. Das Resultat ersieht man aus der kleinen Tabelle Seite 4.

Das Resultat war wieder dasselbe: Es blieb keine verbürgte hyperbolische Bahn zurück.

Die Zahl der Kometen, die sich für eine solche Untersuchung wie die jetzt besprochene eignen, ist sehr gering, erstens weil nur solche Bahnen Interesse haben, deren Exzentrizität der Einheit sehr nahe kommt (stark hyperbolische Bahnen gibt es bekanntlich überhaupt nicht, und die elliptischen Bahnen, deren Elliptizität ausgeprägt ist, brauchen wir ja von diesem Gesichtspunkte aus nicht zu untersuchen), zweitens weil nur solche Kometen in Frage kommen, bei denen die definitive Bahnrechnung auf einem guten und reichlichen Beobachtungsmaterial fusst, das eine längere Zeitperiode umfasst.

Unter den wenigen Kometen, für die eine genügend zuverlässige Bahnrechnung vorliegt, und die noch nicht auf die ursprüngliche Bahn untersucht sind, befindet sich auch der Komet 1907 I (Giacobini). Es liegen für diesen Kometen 175 Beobachtungen vor, die über den Zeitraum vom 12 März 1907 bis zum 24 Januar 1908 verteilt liegen. Die definitive Bahn ist von K. DUBROWSKY und B. NUMEROW, unter Rücksichtnahme auf die Störungen seitens Erde, Mars, Jupiter und Saturn, berechnet worden (A.N. 4671). Die definitiven Elemente lauten:

Oskulation 1907 März 19.0 M.Z. Berlin (Tagesanfang am Mittag).

$T = 1907$ März 19.14368 M. Z. Berlin (Tagesanfang am Mittag).

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 317^{\circ} 5' 57''.1 \\ \Omega = 97 10 13 .7 \\ i = 141 39 45 .4 \end{array} \right\} 1907.0 \quad \begin{array}{l} q = 2.051674 \pm 0.000030 \\ e = 1.001024 \pm 0.000082 \\ \frac{1}{a} = -0.0004991 \pm 0.0000400 \end{array}$$

Wenn wir auf 1950.0 reduzieren und die Perihelzeit in mittlerer Zeit Greenwich ausdrücken, erhalten wir:

$T = 1907$ März 19.10647 M.Z. Greenwich (Tagesanfang am Mittag)

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 317^{\circ}.10801 \\ \Omega = 97 .77775 \\ i = 141 .66132 \end{array} \right\} 1950.0 \quad q, e \text{ und } \frac{1}{a} \text{ wie oben.}$$

Aus ω , Ω , i sind die folgenden Äquator-Konstanten gerechnet:

$$\left. \begin{array}{lll} P_x = -0.6280857 & P_y = +0.7676674 & P_z = -0.1272602 \\ Q_x = +0.4772552 & Q_y = +0.5092055 & Q_z = +0.7161964 \end{array} \right\} 1950.0$$

Die Rückwärtsrechnung ist von Herrn HANS Q. RASMUSEN für 17 Jahre ausgeführt worden, und zwar nach der Methode der direkten numerischen Integration der Koordinaten, unter Rücksichtnahme auf die Sonne, die Erde (nur für 1907), und auf Jupiter und Saturn. Die Rechnung ist mit 7 Dezimalstellen ausgeführt worden. Koordinaten und Sonnen-Akzelerationen für Jupiter und Saturn wurden den COMRIE'schen Tafeln entnommen.

Die Rechnung ergab das folgende Resultat (Tagesanfang am Mittag):

Tafel II.

Äquatoreale Koordinaten des Kometen 1907 I (Giacobini).

	x	y	z
1907 März 25.5 . . .	— 1.235899	+ 1.629196	— 0.183141
— 5.5 . . .	1.394750	1.452439	0.425645
Feb. 13.5 . . .	1.534757	1.256039	0.662409
Jan. 24.5 . . .	1.654981	1.043407	0.890657
— 4.5 . . .	1.755556	0.818333	1.108363
1906 Dez. 15.5 . . .	1.837477	0.584504	1.314326
Nov. 25.5 . . .	1.902304	0.345178	1.508094
— 5.5 . . .	1.951858	+ 0.103029	1.689782
Okt. 16.5 . . .	1.988008	— 0.139874	1.859894
Sept. 26.5 . . .	2.012526	0.381998	2.019145
— 6.5 . . .	2.027017	0.622253	2.168355
Aug. 17.5 . . .	2.032890	0.859892	2.308361
Juli 28.5 . . .	2.031362	1.094424	2.439977
— 8.5 . . .	2.023472	1.325549	2.563962
Juni 18.5 . . .	2.010103	1.553102	2.681013
Mai 29.5 . . .	1.992002	1.777015	2.791761
— 9.5 . . .	1.969802	1.997284	2.896770
Apr. 19.5 . . .	1.944040	2.213953	2.996546
März 30.5 . . .	1.915172	2.427096	3.091540
— 10.5 . . .	1.883589	2.636805	3.182152
Feb. 18.5 . . .	1.849622	2.843185	3.268742
Jan. 29.5 . . .	1.813559	3.046349	3.351628
1905 Dez. 20.5 . . .	1.736097	3.443485	3.507402
Nov. 10.5 . . .	1.652805	3.829118	3.651426
Okt. 1.5 . . .	1.564904	4.204112	3.785280
Aug. 22.5 . . .	1.473329	4.569267	3.910256
Juli 13.5 . . .	1.378813	4.925313	4.027421
Juni 3.5 . . .	1.281930	5.272911	4.137666
Apr. 24.5 . . .	1.183141	5.612656	4.241739
März 15.5 . . .	1.082815	5.945086	4.340276
Feb. 3.5 . . .	— 0.981252	— 6.270685	— 4.433819

	x	y	z
1904 Dez. 25.5 . . .	— 0.878698	— 6.589890	— 4.522835
Nov. 15.5 . . .	0.775354	6.903096	4.607729
Okt. 6.5 . . .	0.671388	7.210661	4.688854
Aug. 27.5 . . .	0.566940	7.512910	4.766519
Juli 18.5 . . .	0.462126	7.810140	4.840996
Juni 8.5 . . .	0.357046	8.102622	4.912528
Apr. 29.5 . . .	0.251781	8.390603	4.981329
März 20.5 . . .	0.146404	8.674309	5.047591
Feb. 9.5 . . .	— 0.040973	8.953951	5.111486
1903 Nov. 21.5 . . .	+ 0.169854	9.501795	5.232780
Sept. 2.5 . . .	0.380375	10.035506	5.346282
Juni 14.5 . . .	0.590353	10.556265	5.452878
März 26.5 . . .	0.799615	11.065093	5.553307
Jan. 5.5 . . .	1.008035	11.562884	5.648194
1902 Okt. 17.5 . . .	1.215523	12.050422	5.738069
Juli 29.5 . . .	1.422014	12.528401	5.823390
Mai 10.5 . . .	1.627464	12.997438	5.904554
Feb. 19.5 . . .	1.831843	13.458086	5.981904
1901 Dez. 1.5 . . .	2.035133	13.910843	6.055746
Sept. 12.5 . . .	2.237325	14.356159	6.126346
Juni 24.5 . . .	2.438418	14.794444	6.193946
Apr. 5.5 . . .	2.638416	15.226073	6.258757
Jan. 15.5 . . .	2.837329	15.651388	6.320971
1900 Okt. 27.5 . . .	3.035170	16.070704	6.380761
Aug. 8.5 . . .	3.231954	16.484312	6.438283
Mai 20.5 . . .	3.427700	16.892479	6.493678
1899 Dez. 11.5 . . .	3.816154	17.693464	6.598590
Juli 4.5 . . .	4.200691	18.475437	6.696402
Jan. 25.5 . . .	4.581476	19.239945	6.787873
1898 Aug. 18.5 . . .	4.958666	19.988341	6.873654
März 11.5 . . .	5.332411	20.721823	6.954307
1897 Okt. 2.5 . . .	5.702847	21.441454	7.030306
Apr. 25.5 . . .	+ 6.070098	— 22.148186	— 7.102084

	x	y	z
1896 Nov. 16.5 . . .	+ 6.434275	—22.842875	—7.170012
Juni 9.5 . . .	6.795471	23.526291	7.234418
Jan. 1.5 . . .	7.153766	24.199132	7.295594
1895 Juli 25.5 . . .	7.509223	24.862029	7.353800
Feb. 15.5 . . .	7.861891	25.515551	7.409263
1894 Sept. 8.5 . . .	8.211805	26.160210	7.462186
Apr. 1.5 . . .	8.558991	26.796463	7.512746
1893 Okt. 23.5 . . .	8.903468	27.424716	7.561096
Mai 16.5 . . .	9.245252	28.045324	7.607367
1892 Dez. 7.5 . . .	9.584366	28.658601	7.651671
Juni 30.5 . . .	9.920840	29.264817	7.694103
Jan. 22.5 . . .	10.254720	29.864212	7.734745
1891 Aug. 15.5 . . .	10.586069	30.457000	7.773667
März 8.5 . . .	10.914966	31.043379	7.810934
1890 Sept. 29.5 . . .	11.241506	31.623536	7.846607
Apr. 22.5 . . .	+11.565794	—32.197655	—7.880745

Aus der Tafel II ergeben sich für 1891 März 8.5 für die gestörten Äquatorkoordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, für die Reduktionen auf den Schwerpunkt $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ und für die auf den Schwerpunkt des Systems Sonne + Jupiter + Saturn bezogenen Äquatorkoordinaten und Geschwindigkeiten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}, \frac{d\bar{z}}{dt}$ folgende Werte (die Bezeichnungen sind von den in der Publ. 19 angewandten etwas verschieden):

$$\begin{array}{lll}
 x = +10.914966 & y = -31.043379 & z = -7.810934 \\
 \xi = -1463 & \eta = +1715 & \zeta = +733 \\
 \bar{x} = +10.913503 & \bar{y} = -31.041664 & \bar{z} = -7.810201
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 160 \frac{dx}{dt} = -0.3277020 \quad 160 \frac{dy}{dt} = +0.5832367 \quad 160 \frac{dz}{dt} = +0.0364598 \\
 160 \frac{d\xi}{dt} = - \quad 5243 \quad 160 \frac{d\eta}{dt} = - \quad 7211 \quad 160 \frac{d\zeta}{dt} = - \quad 3016 \\
 \hline
 160 \frac{d\bar{x}}{dt} = -0.3282263 \quad 160 \frac{d\bar{y}}{dt} = +0.5825156 \quad 160 \frac{d\bar{z}}{dt} = +0.0361582
 \end{array}$$

Aus diesen Werten für die auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen Äquatorkoordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen erhalten wir mit Hilfe der Formel:

$$V^2 = w^2 k^2 (1 + \Sigma m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

also:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{w^2 k^2 (1 + \Sigma m)},$$

den folgende Wert für $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a} = + 0.0000252.$$

Der bei der definitiven Bahnrechnung erhaltene Wert war:

$$\frac{1}{a} = - 0.0004991,$$

und wir sehen also, dass durch die Rückwärtsrechnung die Hyperbolizität in Elliptizität verwandelt wurde.

Der positive Wert des »ursprünglichen« $\frac{1}{a}$ liegt unter dem Wert des aus der definitiven Bahnrechnung hervorgegangenen mittleren Fehlers des oskulierenden $\frac{1}{a}$. Das Hauptergebnis der Untersuchung ist aber, mit den älteren Resul-

taten zusammengenommen, dies: Es ist unter den 14 gerechneten Fällen keine einzige verbürgte Hyperbolizität geblieben.

Wie sollen wir die bis jetzt vorliegenden Resultate verstehen? Könnte nicht eines Tages ein Komet auftauchen, der in unzweideutiger hyperbolischer Bahn von aussen in unser Sonnensystem eingedrungen wäre? Es kann vielleicht eintreffen; wir haben kein Recht, diese Möglichkeit abzuweisen. Was wir aber sagen können, ist, dass es nicht möglich gewesen ist, unter dem bis jetzt beobachteten Kometenmaterial einen solchen Fall nachzuweisen.

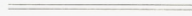
Unter den vielen Kometenbahnen, die berechnet sind, ist die grosse Mehrzahl ausgeprägt elliptisch (wir sehen natürlich von den Fällen ab, wo die Dürftigkeit des Materials nur zu der an sich unendlich unwahrscheinlichen reinen Parabel führte); eine kleine Zahl ist elliptisch mit einer Exzentrizität, die der Parabel nahe kommt; eine sehr kleine Zahl zeigt eine hyperbolische Form, die jedoch in allen bisher bekannten Fällen von der Parabelform sehr wenig abweicht. Von dieser schwachen Hyperbolizität wissen wir jetzt, dass sie in allen bisher behandelten Fällen durch die Rückwärtsrechnung entweder mit Sicherheit in Elliptizität verwandelt wird oder sich wenigstens als gänzlich illusorisch herausstellt.

Es gibt wohl sicher innerhalb unseres Sonnensystems eine ausserordentlich grosse Anzahl von Kometenbahnen, mit allen möglichen Werten der grossen Achse und mit allen möglichen elliptischen Exzentrizitätswerten. Bedingung dafür, dass ein Komet von der Erde aus beobachtet werden kann, ist es, dass die Periheldistanz einen mässigen Wert

hat. Diese Bedingung wird von solchen Kometen erfüllt, die mässige Werte der grossen Achse besitzen, aber auch von Kometen mit grossen Bahndimensionen, wenn nur die Bahnexzentrizität der Einheit sehr nahe liegt. Diese letzteren sind gerade die Kometen, die wir hier besprochen haben: Kometen, die, aus den äussersten Gebieten unseres Sonnensystems kommend, fast direkt auf die Sonne steuern.

Einige Kontrollrechnungen verdanken wir Herrn Magister B. SVANHOF. Dem Carlsbergfond sind wir für pekuniäre Unterstützung zu grossem Danke verpflichtet.

ELIS STRÖMGREN.



Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser **XIII**, 3.

ARTIFICIAL RADIOACTIVITY OF SCANDIUM

BY

G. HEVESY



KØBENHAVN

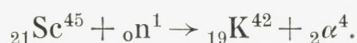
LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

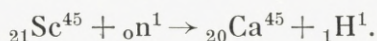
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

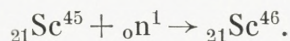
It was pointed out¹ recently that a radioactive potassium isotope of the mass number 42 is produced when scandium is bombarded with neutrons according to the equation



As is known from the work of FERMI and his collaborators the bombardment of nuclei with neutrons can lead to three different types of radioactive products: a) The capture of a nucleus can be followed by the emission of an α -particle as in the above mentioned case of production of potassium from scandium b) After the capture of a neutron a proton instead of an α -particle can be ejected. In the case of scandium, which as we know from ASTON'S work has only one stable isotope (Sc^{45}) we should obtain a calcium isotope according to the equation



c) The capture of a neutron by the bombarded nucleus is not followed by any expulsion of nuclear constituents but leads to the following process



In the following some experiments will be described which were carried out with the aim of ascertaining to what extent

¹ G. HEVESY Nature, 135, 96, 1935, cp. also G. HEVESY and H. LEVY Nature, 135, 580, 1935, where it is shown that K^{42} can also be prepared from Ca^{42} .

when scandium is bombarded by neutrons processes b) and c) occur besides the formation of K^{42} .

Experimental arrangement.

We used as source of neutrons glass tubes of about 5 cm length and 3 mm width filled with a mixture of beryllium powder and 200—300 millicurie radium emanation. These sources were most kindly prepared by Dr. J. C. JACOBSEN. The sealed glass tube was protected by a second one and placed in the centre of a test tube of 12 mm diameter filled with scandium oxide. The test tube was then placed in the centre of a paraffin block of 15 cm edge. The latter device, first applied by FERMI, has the great advantage of adding to the effect of fast neutrons leaving the source a number of slow neutrons reflected by the hydrogen nuclei of the surrounding paraffin. Slow neutrons were found very effective in promoting the process c) (capture of a neutron without expulsion of nuclear constituents), the effect being so pronounced that the formation of several radioelements was only ascertained after application of the above device. For example while under the action of fast neutrons only the formation of ${}_{15}P^{32}$ ($T = 14$ days) was observed from chlorine, the formation of a radioactive chlorine ($T = 55$ min.) was observed by the Italian physicists and independently in this laboratory on surrounding the neutron source with a paraffin block.

In our experiments after a lapse of few days the neutron source was removed and the activity of scandium oxide determined with the aid of a Geiger-Müller tube. The next step was to dissolve the oxide in diluted hydrochloric acid, add 100—150 mg NaCl then the same amount of CaO; and precipitate with ammonia free of carbonate. The filtrate

was treated with oxalic acid and the calcium oxalate formed removed. The sodium chloride added was recovered after the removal of the ammonium chloride content of the last filtrate by evaporation and ignition. The activity of the three fractions namely that of scandium oxide, calcium oxalate and sodium chloride was then determined. As mentioned already we found no indication of the formation of $^{20}\text{Ca}^{45}$. But, the counter being placed at a long distance from the neutron source, we could not have found any product decaying with a period of less than a minute.

The scandium preparation used was kindly presented to the writer by Prof. O. HÖNIGSCHMID and was found to be inactive before the bombardment with neutrons.

Results of the activity measurements.

While the calcium oxalate obtained was found to be entirely inactive, both the sodium chloride and the scandium oxide showed a marked activity, the former due to $^{19}\text{K}^{42}$, the latter to $^{21}\text{Sc}^{46}$. We find for the half life time of K^{42} about 16 hours, for that of Sc^{46} some years. While our experiments were in progress a note was published by D'AGOSTINO, FERMI, PONTECOWO, RASETTI and SEGRÉ¹ announcing the formation of a new potassium isotope by the bombardement of potassium with neutrons (process c)). There can hardly be any doubt that the potassium isotope obtained by the Italian workers is identical with that obtained by us by a different way of synthesis (process a)). As potassium has two stable isotopes 39 and 41, the fact that neutrons are captured is not enough to indicate whether K^{40} or K^{42} is formed in the reaction; however, the decision can be made on the basis of our experiments with scandium. The latter has

¹ Ricerca Scientifica 2, Dezember 1934.

only one stable isotope in fact (Sc^{45}) and therefore the mass number of the potassium isotope obtained by us can be ascertained to be 42. The period of this isotope being the same as that of the Italian workers we can conclude that in their experiments it was the less frequent isotope which captured neutrons and led to the formation of a new isotope of the element in question. That the capture of neutrons by K^{39} could not be proved must not be interpreted as a proof that these nuclei do not capture neutrons. It is even probable that K^{39} also captures neutrons but K^{40} being an isotope of long life its formation can not be ascertained after an exposure of potassium to the action of neutrons for only a few days. Assuming for example that K^{40} is the isotope responsible for the natural radioactivity of potassium and its half value periode is 10^8 years an exposure of thousands of years would be necessary to obtain a synthesis of K^{40} of the same activity as obtained in the case of K^{42} after few days of exposure.

In fact the study of the artificial radioactivity of potassium, calcium and scandium produced under the action of neutron bombardment suggests that the natural activity of potassium is due to the presence of the isotope K^{40} which was made "artificially" radioactive under the action of a radiation present in the cosmic region where the elements in these remote times were located. While all the other radioactive elements outside the disintegration series have decayed since, K^{40} and Rb^{86} having an unusually high period remain in sufficient amount to be detected. Though the artificial radioelements so far discovered have all shorter periods than one year it is probable that future work will reveal much longer periods, filling the huge gap between 1 year and the period of K^{40} . We will in the foll-

owing discuss in detail how far the evidence available on the "natural" radioactivity of potassium supports the above suggestion that the radioactivity of potassium is due to an artificially radioactive isotope K^{40} of long life.

The natural radioactivity of potassium.

When the present writer embarked on the problem of the radioactivity of potassium¹ it was then not known if the β -radiation emitted by potassium is due to the activity of K^{39} (the most abundant isotope) or a less abundant one, of which only one was detected by the mass spectrograph, namely K^{41} , present in potassium to an extent of 7 %. The most direct way to settle this point would have been the separation of the isotopes of potassium using ASTON'S method on large scale and by testing the activity of the fractions obtained. However, at that time this course seemed to be hopeless to pursue and in fact a total separation of the isotopes of potassium is even yet not performed. Therefore the present writer in collaboration with Miss LØGSTRUP embarked on a partial separation by making use of the method of ideal distillation used successfully to separate partially the isotopes of mercury and of chlorine by BRØNDSTED and HEVESY. The residual fraction obtained by this method was found to show a larger radioactivity than normal potassium. This result was secured by two different methods, by measurements carried out in HOFFMANN'S laboratory using the HOFFMANN'S electrometer and in the present writer's laboratory where the GEIGER-MÜLLER tube was applied²; not less than 1.5×10^5 counts were taken and

¹ G. HEVESY and M. LØGSTRUP, *Z. f. anorg. Chem.* 171, 1, 1928.

² G. HEVESY, W. SEITH and M. PAHL, *Z. f. phys. Chem.*, *BODENSTEIN* volume 310, 1931.

the difference in the activity of the heavy and the normal potassium was found to be 4.43 ± 0.53 %. From the fact that the heavy fraction was found more active than normal potassium it had to be concluded that the activity of potassium is due to a heavier isotope and not to the main isotope K^{39} . As the latter was concentrated in the light fraction we should have observed a decrease of the activity of the heavy fraction had K^{39} been the active isotope. The next step was to determine the mass of the active isotope. This can be done by comparing the change in activity with that in the isotopic constitution (ratio $K^{39} : K^{41}$) of the heavy sample obtained. Let us assume that the atomic weight determination of the heavy fraction would indicate an increase of the concentration of K^{41} to an extent of 4.4 %; we would have then to conclude that the isotope responsible for the activity of potassium has the mass number 41 as it is separated with the same ease from K^{39} as K^{41} was. The degree of separation depends, under identical experimental conditions, solely on the ratio of the atomic weights of the isotopes to be separated, this being proportional to the square root of the ratio of the mass numbers in question. Should the radioactive separation be larger than the separation of K^{41} by the distillation process, the radioactive isotope would have had to differ by more than 2 mass units from K^{39} . From an activity increase of 5.1 % for example it would follow that the mass number 42 was the active isotope. Beside the radioactive measurements, measurements of the atomic weight of the residue obtained have to be carried out to settle the point in question. Prof. HÖNIGSCHMID and Dr. GOUBEAU very kindly determined the atomic weight of the heavy potassium obtained by us to be 39.109, taking the atomic weight of normal potassium

to be 39.104 the difference in the atomic weight of the heavy and normal potassium works out to be 0.005, corresponding to an increase of 4.2 % in the content of K^{41} in our heavy sample. As the increase in radioactivity was found to be 4.4 % we had to conclude that the radioactivity of potassium is due to K^{41} and this conclusion was drawn in our former papers. Recent determinations of the atomic weight of potassium lead, however, to a substantially different value from that quoted above, namely to 39.096, which has been accepted by the International Atomic-weight Commission. The difference between the atomic weight of our heavy fraction and that of normal potassium then works out to be 0.013 units, as pointed out by BAXTER¹.

The shift in the $K^{41}:K^{39}$ ratio obtained by the separation process is thus distinctly greater than that of the change in radioactivity. Now the degree of separation obtained depends under identical experimental conditions only on the difference in the mass of the isotope to be separated and that of the main isotope K^{39} . As the radioactive separation was much less effective than the concentration of K^{41} it follows that the mass number difference between the radioactive potassium isotope and K^{39} must be less than between K^{41} and K^{39} , so that the mass number of the isotope to which the natural radioactivity of potassium is due can only be K^{40} . It should be emphasised that our former conclusion according to which the atomic weight of the radioactive isotope is K^{41} was solely due to the fact that the value taken for the atomic weight of normal potassium was too high. It has since been ascertained and accepted by the atomic weight commission that

¹ G. P. BAXTER and Ch. M. ALTER, I Amer. Chem. Soc., 55, 32, 70, 1933.

this value is actually 0.008 units lower than was thought before, while the atomic weight of our heavy fraction was found both in the München and the Harvard laboratory to be exactly the same, namely 39.109. The partial separation of the potassium isotope by the ideal distillation process leads therefore to a result in concordance with the above assumption that the radioactivity is due to the presence of an "artificially" activated potassium isotope K^{40} of very long life.

The period of K^{40} .

The fact that K^{40} is still present, though its formation must go back to pregeological times, indicates a very long period for K^{40} . From the number of β particles emitted per time unit per 1 g potassium we can calculate the period of decay of potassium. The calculation leads to a half life value of 1.5×10^{13} years. In this calculation it is assumed that all potassiums atoms decay with time; if for example only 1 % of the latter are radioactive the half life value is reduced to 1.5×10^{11} years. As ASTON's and BAINBRIDGE's work does not reveal the presence of K^{40} in the mass spectrum and one part of K^{40} in 300 of K^{39} would have been certainly revealed it can be concluded that the concentration of the radioactive K^{40} in potassium is less than 1:300 and accordingly the period of K^{40} must be less than 5×10^{10} years. Let us now calculate the lower limit of the period K^{40} . Thus calculation is based on geochemical data. We start by making the assumption that the half life value of K^{40} is 6×10^7 years, in which case potassium would to-day only contain 0.4×10^{-6} part K^{40} in one part of the element, while 10^9 years ago K^{40} would have been the dominant isotope, its concentration being at

that time about 25 times greater than that of the to-day dominating K^{39} . The decay of K^{40} during that long span of time should have produced vast amounts of its disintegration product Ca^{40} (the predominating isotope of calcium) in earth crust amounting to-day to about 25 times its potassium content. Now the total calcium content of the igneous rocks is 3.4×10^{-2} g per g, only slightly greater than that of potassium content (2.4×10^{-2} g per g). We must further remember that the time since potassium and the other elements ceased to be in a cosmic place where they could be acted upon by radiation producing "artificial" radioactivity must be appreciably longer than 10^6 years which was taken as the basis of the above calculation and also that it is not probable that all Ca^{40} present should have been formed through the decay of K^{40} as several other nuclear reactions lead as well to the formation of that isotope. Therefore we can safely assign 7×10^7 as the lower limit of the period of the isotope K^{40} . The lower limit of the fraction of K^{40} in the mixed element potassium at present has accordingly to be larger than $10^{-6} : 1$ while its upper limit is below $2 \times 10^{-3} : 1$. In the past that fraction was larger and if the half-life of K^{40} happens to be closer to the lower limit mentioned above the amount of K^{40} present for many millions of years was very appreciably greater than it is to-day. Even the present low concentration of K^{40} is not without significance for the heat equilibrium of the earth¹ the heat production due to the decay of K^{40} being about $1/10$ of that of the thorium or of the uranium series. If in former times the amount of K^{40} present was many thousand times greater than to-day the heat

¹ A. HOLMES and R. W. LAWSON, *Nature* 117, 620, 1926, cp. also G. HEVESY and M. LØGSTRUP l. c.

production of K^{40} was correspondingly a much greater one, and the same consideration applies to the intensity of radioactive radiation emitted by potassium present for example in plants.

The disintegration product of potassium.

As K^{40} is converted through disintegration into Ca^{40} the most abundant isotope of calcium and one of the dominant elements of the earth's crust present in nearly every mineral and practically in every rock sample we cannot expect find evidence through investigation of the calcium content of the latter of the accumulation of the disintegration product of K^{40} during geological times. Should, however, the radioactivity of potassium be due to K^{41} matters would be very different as we could possibly expect to find the accumulation of the yet unknown isotope Ca^{41} in old minerals rich in potassium. At a time when the interpretation of the result of our separation experiments indicated that the active isotope of potassium has the mass 41 the present writer and W. DULLENKOPF¹ extracted calcium from old micas containing 6.5 % potassium and somewhat less than 0.05 % calcium. As during 10^9 years less than 1:10000 part of K^{41} was expected to be converted into Ca^{41} it was of great importance to choose old micas containing as little calcium as possible. From the numerous micas tested the above mentioned one from Bamle in Norway was found to be the most suitable one; large amounts of this mica were kindly presented to us by Prof. V. M. GOLDSCHMIDT. The calcium extracted by us was investigated by Dr. ASTON, who could not find any difference between the isotopic constitution of that sample and that of the normal element. Though this negative result

¹ G. HEVESY and W. DULLENKOPF, *Z. anorg. Chem.* **221**, 167, 1925.

has to be interpreted with care as on account of the slow decay of potassium our sample could not contain more than about 1 % Ca^{41} and the remaining 99 % could therefore not differ in composition from normal calcium and also because calcium is comparatively easily removed from micas through geochemical processes, the negative result obtained falls in line with the above conclusion according to which the radioactivity of potassium is due to K^{40} .

Energy of the β -rays emitted and the period of K^{40} .

As well known a short range of α -particles corresponds to a long period of the disintegrating radioelement and vice versa. A similar regularity is observed¹ when the period of the elements is compared with the energy of the short wavelength end of the continuous β spectrum. Now if K^{40} has the large half-life value mentioned above we should expect it to emit very soft β -rays. That is, however, not the case: β -rays having an energy of as much as 700 eV were observed in the magnetic spectrum of potassium. By comparing the period and β -spectrum of the group of elements containing RaE, RaC and so on one arrives to a half-life time of K^{40} corresponding to only 25 days. As pointed out recently by KLEMPERER² this difficulty can be avoided by taking into account the fact that while through the transformation of RaE into RaF and so on the nuclear spin changes with ± 1 unit, we have to expect a change amounting to 4 to 5 units in the nuclear spin when K^{40} changes into Ca^{40} . Such a large change in the nuclear spin lowers very strongly the probability of decay and to arrive at a proper value of the half-life value of K^{40} we have to

¹ B. W. SARGENT, Proc. Roy. Soc. A. 140, 659, 1933.

² O. KLEMPERER, Proc. Roy. Soc. A. 148, 646, 1935.

multiply the above mentioned value of 25 days by a coefficient of 10^4 to 10^5 . We obtain then a half-life value of K^{40} equal to 10^7 to 10^8 years in much better accordance with the value obtained through geochemical and similar considerations.

Hardness of the β -rays emitted by the activated scandium.

We determined the hardness of the β -rays emitted both by the sodium chloride preparation containing K^{42} and the scandium oxide after the removal of K^{42} . A Geiger-Muller tube was used and the number of kicks ascertained first without the presence of an absorbing aluminium foil and then in the presence of the latter. The counter had an aluminium window of 50μ thickness covering an area of 2 cm^2 , and the preparation was placed at a distance of 1 mm below it. As a result of the absorption measurements we get in the case of K^{42} for the half value thickness of the absorbing aluminium foil 0.07 cm or 0.19 g per cm^2 which corresponds to an absorption coefficient of 10 cm^{-1} , while the corresponding figures for the β -radiation of Sc^{46} are 0.011 cm for the half value thickness, or 0.03 g/ cm^2 and $\mu = 63 \text{ cm}^{-1}$. The accuracy obtained is to be seen from the following figures obtained in three consecutive

Table 1.

Absorption of the β -rays of Sc^{46} in 0.01 cm Al.

	I	II	III
Number of kicks without foil	17.3	17.1	15.5
Number of kicks with foil	11.3	11.0	10.2
Natural leak without foil	6.9	6.9	6.1
Natural leak with foil	5.6	5.4	5.4
Calculated half value thickness	0.011 cm	0.010 cm	0.010 cm

experiments. The radiation emitted by Sc^{46} is thus appreciably softer than that emitted by K^{42} , being the softest mean β -radiation yet observed in the domain of artificial radioactivity.

When applying the relation of SARGANT¹ to the energy of the β -radiation found we arrive to the following result: Sc^{46} having a period of few years and emitting a β -radiation of a mean energy of 2.6×10^5 eV compares more or less with the case of ThB which decaying with a period of about $\frac{1}{2}$ day emits β -rays having a mean energy of 8.9×10^5 eV. But the mean energy of the β -rays emitted by K^{42} is much greater than to be expected on the basis of the above mentioned relation. This body decaying with a period of 16 hours emits β -rays of a mean energy of 1.5×10^6 eV, which are harder than those emitted by any member of the radioactive disintegration series; even UX_2 having half-life time of about 1 minute emits β -rays of only 0.8×10^6 eV. We experience thus the same difficulty in the case of K^{42} as that which which faced us in the case of K^{40} in a still higher degree and which is discussed on page. 13.

Ratio of the formation of Sc^{46} and K^{42} .

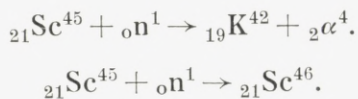
The ratio of formation of the two products of the scandium bombardment with neutrons depends in a high degree on the experimental conditions. The formation of Sc^{46} is much facilitated by the use of slow neutrons. The following figure relates to the case in which the neutron source is first surrounded by scandium oxide and then placed in the centre of a paraffin block of 15 cm edge. After an exposure of 40 hours we find K^{42} to be 1.7 times more active

¹ B. W. SARGANT, Proc. Roy. Soc. A. 140, 659, 1933.

than Sc^{46} . To arrive at a correct ratio of the number of Sc^{46} and K^{42} atoms formed in the time unit it is necessary to take into account a) The lapse of time between the interruption of the activation and the measurement b) To take into account that while K^{42} is nearly activated to the maximum of the obtainable activity in 40 hours a very much greater activity of Sc^{46} could be obtained by an activation of years; i. e., the ratio of the periods of Sc^{46} and K^{42} must be taken into account. c) Due regard has to be taken of the great difference in penetrating power of the β -rays emitted by the two radioelements. The application of these corrections leads to the result that under our experimental conditions at least 1000 times more Sc^{46} than K^{42} is formed per unit time.

Summary.

Under the action of neutron bombardment the following reactions take place



${}_{19}\text{K}^{42}$ has a half life time of 16 hours and emits β -rays having in aluminium an absorption coefficient of 10 cm^{-1} , while ${}_{21}\text{Sc}^{46}$ has a half life time of some years and emits very soft rays having an absorption coefficient of 63 cm^{-1} .

The decay of ${}_{19}\text{K}^{42}$ leads to ${}_{20}\text{Ca}^{42}$ that of ${}_{21}\text{Sc}^{46}$ to the formation of ${}_{22}\text{Ti}^{46}$ both being stable isotops revealed by the mass spectrograph.

The problem of the natural radioactivity of potassium is discussed and it is shown that the radioactivity is due to the isotope ${}_{19}\text{K}^{40}$ having a half-life time of $10^8 - 10^{10}$ years.

The formation of ${}_{19}\text{K}^{40}$ has presumably taken place in pregeological times in a similar way to the formation of ${}_{19}\text{K}^{42}$ witnessed in the laboratory and discussed in this paper.

The author wants to express his best thanks to Miss HILDE LEVI and Mr. HØFFER-JENSEN for their very effective help in carrying out the experiments described.

Institut for teoretisk Fysik,
København, Januar 1935.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 4.

CORRELATION OF
CERTAIN COLLISION PROBLEMS
WITH RADIATION THEORY

BY

E. J. WILLIAMS



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Introduction.

It is possible in certain collision problems, involving charged particles, to make a correlation with radiation theory by analysing the perturbing fields of the particles into pure harmonic waves, and comparing the effect of these components with that of homogeneous radiation of corresponding intensity and frequency. Such a procedure was used by FERMI¹ (1924) to calculate the ionisation of atoms by α -particles. More recently its application to radiative collisions has been considered by WEISZÄCKER² and the writer.³ In this paper a further general development of the method is made, with applications to the production of pairs of positive and negative electrons by high-energy photons and electrons, the splitting of a photon by an electric particle, radiative collisions, nuclear disintegration by electrons, and other problems. In some of these problems new results are arrived at, and in others a check obtained on previous results. The value of the method, however, lies perhaps not so much in this as in the new view-point provided by an analysis of the problems dealt with into two parts viz.

¹ Zs. f. Phys. 29, 315, 1924.

² Zs. f. phys. 88, 612, 1934.

³ Phys. Rev. 45, 729, 1934. In this communication to Physical Review a forward reference was made to the present paper, the publication of which has been delayed through the inclusion of more applications than was then intended. A brief discussion of the method under consideration was also given by the writer in an earlier paper, Proc. Roy. Soc. 139, 163, (1933).

the representation of the perturbing field by radiation, and then the calculation of the effect of this radiation.

The characteristic features of quantum mechanics enter only into the second part, and, as a result, this kind of analysis makes it easier to see what is the theoretical basis of the final results, and therefore helps us to judge their validity. Interesting cases in this connection are the emission of radiation in collisions between a high energy electron and a nucleus, and the production of pairs by a high-energy photon in a nuclear field. In these cases we find that the quantum mechanics which enters into the existing treatments really concerns only energies of the order of mc^2 however big the energy of the electron or photon.

In connecting up collision phenomena with radiative effects certain features of the former are readily seen to be due to quite familiar results in radiation theory. For instance the large number of collisions, according to BETHE's calculations using BORN's method, in which a fast particle loses energy close to the ionisation potential of the atoms traversed, is seen to be exactly the same effect as the well-known rapid increase in photoelectric absorption as an absorption edge is approached. As another example, the much greater radiation emitted by a very fast electron in a classical collision than in a quantum-mechanical collision, is found to correspond very closely to the much greater scattering given by the classical THOMSON formula for high frequencies than is given by the quantum-mechanical formula of KLEIN and NISHINA. Another instance, where the ordinary treatment gives no obvious interpretation, is the size of the region around the nucleus from which pairs are produced by high energy photons. This region extends out to a distance of the order of $\xi(h/mc)$ from the nucleus, where

ξmc^2 is the energy of the photon. The present treatment shows that this is so because out to $\xi(h/mc)$, but no further, the field of the nucleus has FOURIER components with high enough frequency to satisfy the threshold energy condition for the production of pairs.

The paper is arranged into two parts. In the first part the conditions of applicability of the method, and the form of the spectrum of the "equivalent" radiation are considered. The second part is devoted to applications, the following problems being considered:

- 1) Ionisation of atoms.
 - 2) Disintegration of atomic nuclei by fast electrons.
 - 3) Radiative collisions, low velocities, $v/c \ll 1$.
 - 4) Radiative collisions, high velocities, $1 - v/c \ll 1$.
 - 5) Production of electron-pairs by a high energy photon in the field of an atomic nucleus.
 - 6) Production of electron-pairs in collisions between two electric particles.
 - 7) Splitting of a photon in the field of an electric particle.
-

PART 1. GENERAL

§ 1. Conditions of Applicability.

The general justification of the method under consideration lies in the fact that quantum-mechanics makes no *a priori* distinction between the effect of the field of a charged particle and that of a radiation field. If within a certain region the one has the same electromagnetic description as the other, then they produce the same effects within that region, provided reaction is small. The conditions of applicability of the method are then:

- (I) the condition for reproducing the field of the perturbing particle over the region occupied by the perturbed system, during the collision, by a radiation field.
- (II) the conditions for considering as independent the effects of the different FOURIER frequencies in this field.

As regards the second condition, it follows from the linearity of the equations of motion that the effect of a given 'frequency' in the FOURIER spectrum of the perturbing field depends on the other frequencies only if the latter are sufficiently intense that they produce, in a given collision, an appreciable change in the perturbed system. The condition is therefore satisfied if the field of the perturbing particle is sufficiently weak that in a given collision there is only a small probability that the perturbed system makes

a transition from its initial state.¹ If this probability (π) is not small then the change produced in the system by a given frequency, ν , may depend to an appreciable extent on the change which is being produced in the system by the other frequencies. The phase-relationship of the different frequencies — which makes them build up into a pulse — is then of primary importance. It should be emphasised, in passing, that if under certain conditions the linearity of the equations of motion required by quantum-mechanics breaks down the separate harmonic components of the perturbing field may not be independent even though $\pi \ll 1$. The observed failure of the quantum-mechanical radiative formula for very high energy electrons seems to indicate that such conditions do exist if the perturbing field acting on an initially stationary electron is so contracted by the LORENTZ-FITZGERALD effect that its 'thickness' is less than the classical electron radius, e^2/mc^2 . This has been discussed elsewhere by the writer², and also by OPPENHEIMER³, and will not be entered into further in this paper.

It is important to note that if we are not concerned with the final state of the perturbed system, the condition $\pi \ll 1$ need not necessarily be satisfied. This is so for a radiative collision, where we are interested in the radiation emitted by an electron rather than in its final motion after the collision. In this case it is only necessary that the probability be small that in a given collision the perturbed electron, if initially at rest, does not acquire a velocity

¹ This condition ($\pi \ll 1$) is essentially equivalent to the condition of applicability of the first approximation in BORN's method of treating collisions. In both cases the probability that the perturbed system is left in its initial state, in a given collision, must be large.

² E. J. WILLIAMS, Phys. Rev. 45, 729, (1934).

³ J. R. OPPENHEIMER, Phys. Rev. 45, 903 (1934).

comparable with that of light, in order that its scattering power may remain unaffected.

As regards the reproduction of the field of the perturbing particle by radiation — condition (I) — let us first consider the field at a point P due to a particle A , of charge E , moving with uniform velocity v along aa' . The field at P may be resolved into two components of electric force, $E_1(t)$ and $E_2(t)$, perpendicular and parallel to v respectively; and a magnetic force $H(t)$ equal to $(v/c)|E_1|$, and perpendicular to v and E_1 . $E_1(t)$ and $E_2(t)$ are given by

$$E_1(t) = \xi E p \{p^2 + \xi^2 v^2 t^2\}^{-3/2}$$

$$E_2(t) = \xi E v t \{p^2 + \xi^2 v^2 t^2\}^{-3/2}, \quad \xi = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (1)$$

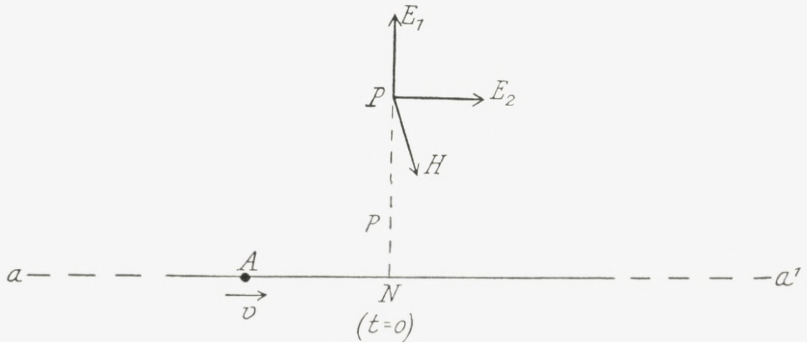


Fig. 1.

It will be noticed that the interval of time, T , for which the forces are appreciable is of the order of $p/\xi v$, and that during this time $|E_2| = |E_1| vt/p \approx |E_1| (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Let us now imagine a plane radiation pulse R_1 travelling parallel to v , with an electric force equal to $E_1(t)$ at P ; and another pulse R_2 travelling perpendicular to v and E_1 , with an electric force equal to $E_2(t)$. These radiation pulses accurately reproduce the electric field of A at P , but not its magnetic field. The magnetic field of the pulses exceeds

that of A by a component equal to $|E_1|(1 - v/c)$ parallel to H , and a component equal to $|E_2|, \approx |E_1|(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, parallel to E_1 . Since the relative importance of the magnetic and electric forces in a perturbing electromagnetic field is of the order of u^2/c^2 , where u is the velocity of the perturbed particle, it follows that the errors arising from the misrepresentation of the magnetic field of A by the pulses R_1 and R_2 , is of the order of $(1 - v^2/c^2)u^2/c^2$. They may therefore be neglected provided

$$(1 - v^2/c^2)u^2/c^2 \ll 1. \quad (2)$$

This condition is satisfied in most collision problems because velocities u comparable with c do not usually occur in the perturbed system except when the velocity v of the perturbing particle, A , is close to c .

We have chosen the pulses R_1 and R_2 to represent the field of the particle A only at one point P , and for only one velocity of the observer, viz., zero velocity in the system in which A moves with velocity v . In order that they may have the same effect as A in actual collisions, they must reproduce the field of A for an observer situated at any of the points where the perturbed particle may be during the collision, and travelling with any of the velocities which it may have. It may be shown that these conditions are satisfied provided

(a) $L \ll p$, where L represents the dimensions of the perturbed system at the beginning of a collision, p the impact parameter.

(b) $u(1 - u^2/c^2)^{-1/2} \ll v(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. u denotes the range of velocities of the perturbed particle, including velocities acquired during the collision under consideration. v denotes the velocity of the perturbing particle. Both u and v are

measured in a system in which the perturbed particle is initially at rest (or more precisely in which its average initial velocity is zero).¹

Finally we must consider the conditions for regarding the perturbing particle, A , as a centre of force moving with uniform velocity. Deviations from this will occur for two reasons, viz. the reaction of the perturbed system on A , and secondly the natural uncertainty in its position and velocity. In nearly all problems to be considered here the perturbed particle is an electron, so that the mass, m , of the perturbed particle is never greater than the mass, M , of the perturbing particle, A . It follows that in a collision which satisfies the above condition (b) the transfer of momentum during the collision is small compared with the momentum of A . The effect of reaction can therefore be neglected if (b) is satisfied. The effect of the natural uncertainty in the velocity and position of A on the definition of its path is small provided its de BROGLIE wavelength, h/Mv , is much less than the impact parameter p . This is also satisfied if the conditions (a) and (b), given above, are fulfilled, because if $L \ll p$ and $u \ll v$ then we must have $h/mv \ll p$, and therefore $h/Mv \ll p$, since $M \gg m$. (a) and (b), and the condition for the independence of the FOURIER components of the perturbing field of A , thus represent the complete conditions for the applicability of the method.

§ 2. Spectrum of Equivalent Radiation.

The spectral distribution in the pulses R_1 and R_2 , which represent the field of the perturbing particle in a collision with an impact parameter, p , is given in terms of the ex-

¹ This condition ensures that the condition (2), regarding the representation of the magnetic field, is also satisfied.

pressions (1) for the component forces, $E_1(t)$, and $E_2(t)$, by the formula

$$I_{1,2}(\nu) = (c/2\pi) \left| \int E_{1,2}(t) e^{2\pi i\nu t} dt \right|^2 \quad (3)$$

$I(\nu)$ is in ergs, per unit frequency range, per unit area of the plane of the pulse. For low frequencies such that $\nu \ll v\xi/p$, the exponential in (3) varies very little during

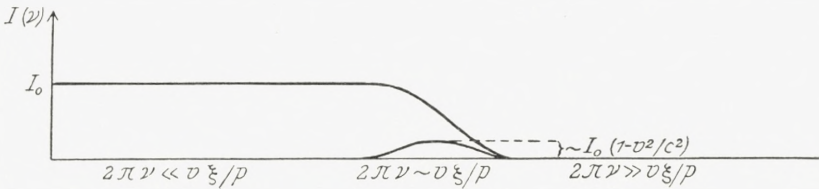


Fig. 2.

the time, T , for which E_1 and E_2 (given by (1)) are appreciable. For such frequencies, $I(\nu)$ is therefore independent of ν , and is given by

$$I_{1,2}(\nu) = I_0 = (c/2\pi) \left\{ \int E_{1,2} dt \right\}^2. \quad (4)$$

Using the expressions (1) this gives $I_0 = (2c/\pi) E^2/p^2 v^2$ for R_1 , and zero for R_2 (E_2 being an odd function of the time).

For high frequencies such that $2\pi\nu \gg v\xi/p$, E_1 and E_2 vary very little during one period of the exponential in (2), so that $I(\nu)$ is negligible for both R_1 and R_2 . Thus for R_1 , $I(\nu)$ is constant for $2\pi\nu \ll v\xi/p$, falls off rapidly in the region $2\pi\nu \sim v\xi/p$, and is negligible for $2\pi\nu \gg v\xi/p$. R_2 is appreciable only for $2\pi\nu \approx v\xi/p$, and in this region its intensity relative to that of R_1 is of the order of $(1 - v^2/c^2)$. These main features are represented schematically in Fig. 2.

In actual applications of the method it is convenient to have an expression for the spectrum of the resultant radiation which represents the effect of the perturbing par-

ticle in all collisions with impact parameter greater than some quantity p_m . This is given in terms of the intensity $I(\nu, p)$ of the pulses R_1 and R_2 , for a given value of the impact parameter, p , by the integral

$$I(\nu, p_m) = \int_{p_m}^{\infty} I(\nu, p) 2\pi p dp$$

Using (1) for $E_1(t)$ and $E_2(t)$, and (2) for $I(\nu, p)$ this gives¹

$$\left. \begin{aligned} I_1(\nu, p_m) &= (4E^2 c/v^2) \log(1.12 v \xi / 2\pi\nu p_m \sqrt{\epsilon}) \\ I_2(\nu, p_m) &= (2E^2 c/v^2) (1 - v^2/c^2) \\ I(\nu, p_m) &= I_1 + I_2 = (4E^2 c/v^2) \log(fv \xi / 2\pi\nu p_m), \\ f &= 1.12 \epsilon^{-v^2/2c^2} \approx 1. \end{aligned} \right\} (6)$$

The expression for the resultant intensity falls off logarithmically with the frequency ν , and $(v\xi/p_m)$ is an effective upper limit to the spectrum. The formula is not accurate near the upper limit, but in most of the present applications such frequencies are not involved.

The units in term of which (6) is expressed are such that $I(\nu, p_m) d\nu$ is the energy of the equivalent radiation of frequency between ν and $\nu + d\nu$ per particle. It corresponds to a number of photons in the interval $d\nu$ equal to

$$\begin{aligned} N(\nu, p_m) d\nu &= (4E^2 c/v^2 h\nu) \log(fv \xi / 2\pi\nu p_m) d\nu \\ &= (2/\pi) \alpha z^2 (v/c)^{-2} \log(fv \xi / 2\pi\nu p_m) d\nu/\nu \end{aligned}$$

where

$$\alpha = e^2/\hbar c, (\alpha = 1/137), ze = E. \quad (7)$$

This formula represents the effect of the field of the moving particle at distances from its path greater than p_m . The suitability of the method in any given problem depends

¹ Cf. N. BOHR, Phil. mag. 25, 10, 1913; 30, 531, (1915).

on whether or not a value of p_m can be chosen so that the effect of the field of the particle inside p_m is of little importance, while at the same time its field outside p_m can be represented by radiation, in accordance with the conditions (a) and (b) of § 2. This is approximately so in the problems considered in this paper. We shall here consider in particular the case of those problems, such as the radiative effect and "pair-production", in which the perturbed particle is an electron and the perturbing particle an atomic nucleus, whose charge ze , we shall assume to satisfy $ze^2/hv \ll 1$. In such problems the nuclear field inside a sphere around the nucleus of radius less than $r_0 \sim \hbar/mv$ makes no significant addition to the resultant effect. As v approaches c the radius r_0 of this sphere, inside which the field is of little importance, approaches \hbar/mc , and not the DE BROGLIE wavelength $(h/mc)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, though it is the latter which defines the ineffective region for scattering. The reason for this will not be entered into here as it is considered in a later paper, on some general collision problems, by Professor BOHR and the writer. Here we need only consider to what extent the nuclear field outside \hbar/mv can be represented by radiation.

For the representation of the field at a given distance p from the nucleus, by radiation, conditions (a) and (b) require the perturbed electron in a collision with impact parameter p to be, during the collision, within a volume of dimensions $L \ll p$, and not to have momentum approaching $mv(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — both L and the momentum being measured in a system in which the average initial velocity of the electron is zero¹. Now if we represent the

¹ These conditions are of course also conditions for the use of the idea of impact parameter.

electron at the beginning of such a collision by a wave-packet of dimensions, $L, \sim (\hbar/mv \cdot p)^{1/2}$ then the ranges of position and velocity during the collision, due to the natural uncertainty associated with this finite wave-packet, are of the order of $(\hbar/mv \cdot p)^{1/2}$ and $(\hbar/mv/p)^{1/2} v$ respectively. Therefore, apart from velocities acquired during the collision, the conditions (a) and (b) are sensibly satisfied provided $p > \hbar/mv$. As regards the velocities acquired during the collision these may be due to the ordinary process of momentum transfer, or to the special phenomenon under consideration. In the radiative effect for example, the electron acquires recoil momentum through the emission of radiation. This second kind of momentum transfer will be considered in the actual applications. The first kind of momentum transfer effectively takes place in every collision and its average value is equal to the ordinary classical momentum transfer. The latter corresponds to a change of velocity of the order of ze^2/pvm . For $p \sim \hbar/mv$ this is equal to $(ze^2/\hbar v) \cdot v$, which is small compared with v under the condition $ze^2/hv \ll 1$. Provided therefore that $(ze^2/hv) \ll 1$, the field of the nucleus outside \hbar/mv can, to a first approximation, be represented by radiation. The spectral distribution of energy in the equivalent radiation is then given by (7) with $p_m = \hbar/mv$. With this value of p_m (7) becomes

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha z^2 (c/v)^2 \log(gmv^2 \xi/h\nu) d\nu/\nu. \quad (8)$$

This formula will be used in many of the subsequent applications. We cannot give a definite value to the numerical coefficient g inside the logarithmic term. We only know that it is of the order of unity. The reason for this is that the lower limit to the effective region of the nuclear field in the problems concerned can only be said to be

of the order of \hbar/mv , and also the fulfilment of the conditions (a) and (b) is critical in the limit $p \sim \hbar/mv$. This uncertainty regarding the value of g represents the degree of approximation attained by the method in these problems. When the order of magnitude of the argument of the logarithmic term is large, as is the case in many of the problems considered, the approximation is good.

It might be mentioned here that the fine-structure constant, α , which enters into the equations (7) and (8), and the logarithmic term, are the principal factors in the relation of the effects of an electric particle to those of radiation. The logarithmic term depends essentially on the Coulomb law of force. $(\xi v/2\pi\nu)$ in the argument of this term in (7), represents the greatest distance from the path of a particle moving with velocity v at which frequencies ν are found in the spectrum of its field (see fig. 2). If the perturbing field is not a Coulomb field then the logarithmic term must be modified. A case of practical interest, and where a modification can readily be made, is when the perturbing particle is an atomic nucleus, shielded by the atomic electrons. In that case, if the quantity $(\xi v/2\pi\nu)$ inside the logarithmic term is greater than atomic dimensions, it must be replaced by a "shielding" radius. For atomic number Z the effective shielding radius is of the order of $Z^{-1/3}a = Z^{-1/3}(\hbar/mc\alpha)$, a being the hydrogen radius. Making the modification in the case of formula (8) we have

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha z^2 (c/v)^2 \log (v/\alpha cz^{1/3}). \quad (9)$$

As regards the polarisation of the "equivalent" radiation represented by the above equations the photons contributed by the pulse R_1 , corresponding to the component of electric force in the field of the particle perpendicular to its path,

are effectively unpolarised and travel in the same direction as the electric particle. They are unpolarised because the resultant photon distribution involves an integration round the path of the moving particle as axis. When $(1 - v^2/c^2) \ll 1$ the pulse R_2 is of negligible intensity, so that under such conditions the whole of the equivalent radiation is represented by R_1 , and is therefore unpolarised and travels with the particle. R_2 , though always small, is not negligible, if $(1 - v/c) \sim 1$. Under such conditions the resultant equivalent radiation is partially polarised because the electric force in R_2 is always parallel to the path of the particle. This must be remembered if a polarisation is of importance.

PART 2. APPLICATIONS

§ 3. General relations.

We shall here consider the general relations between various collision phenomena and radiation effects. These relations form the basis of the more detailed calculations given in the sections to follow. The simplest example is the ionisation (or excitation) of an atom by a moving particle. This effect is related to the photoelectric action of radiation, and may be calculated by considering the photoelectric absorption of the "equivalent" radiation discussed above. The process may be represented as follows:

$$S_{occ} + S'_{emp} + h\nu_p \rightarrow S_{emp} + S'_{occ}. \quad (10)$$

S_{occ} denotes an occupied state in the atom, S'_{emp} an empty state of higher energy. $h\nu_p$ denotes a photon which we associate with a frequency ν_p in the FOURIER spectrum of the field of the moving particle, — we can call it a virtual photon.

The reverse of an ionising collision is a collision of the second kind, in which the atom is initially in an excited state, and drops to a state of lower energy during the collision — the colliding particle experiencing a gain of energy. In terms of radiation effects this process is one of induced emission, and may be represented by

$$S'_{occ} + S_{emp} + Nh\nu_p \rightarrow S'_{emp} + S_{occ} + (N+1)h\nu_p. \quad (11)$$

N is a measure of the number of virtual photons, per unit frequency range in the field of the perturbing particle, whose frequencies correspond to the energy difference ϵ between the states S and S' . Owing to the induced nature of the phenomenon the quantum of energy given out by the atom is taken up by the moving particle, and does not appear as a free radiation photon. This is indicated in (10) by $(N+1)h\nu_p$ on the R. H. S.¹

The relations between other collision phenomena and radiation effects are given in the following table. In all the cases the perturbing particle is an atomic nucleus, and the perturbed particle an electron. The notation used in the third column is analogous to that used in (10) and (11). \bar{S} denotes a Dirac negative energy state, $\overset{+}{S}$ an ordinary state of positive energy. \bar{S}_{emp} accordingly means a positive electron, and, $\overset{+}{S}_{occ}$ a negative electron. A photon of frequency ν_n in the virtual radiation field of the nucleus is denoted by $h\nu_n$, an ordinary (or external) photon by $h\nu_e$.

It might be mentioned that though many of the effects given in the above table concern interaction with electrons in negative energy states it does not seem possible to include with them the coherent scattering of radiation in the

¹ It is of course not meant that the new spectrum of the particle corresponds to such a change in the intensity of a given frequency. Actually the acquisition of energy by the moving particle affects the whole of its Fourier spectrum. This difference between the field of a moving particle and a true radiation field is one of reaction, and is of no consequence provided the energy exchange is small compared with the kinetic energy of the particle (cf. § 1). If the effect of radiation essentially depended upon its quantisation, this would not necessarily be true. That is, however, not the case, the effect of radiation being calculable quantum-mechanically from its electro-magnetic description alone, without explicit reference to photons.

Relations between collision phenomena and radiation effects.

Collision Phenomenon	Corresponding Radiation Effect	Equation for Process
1) Radiative Collision.	Scattering.	$S_{occ}^+ + S_{emp}'^+ + h\nu_n \rightarrow$ $S_{emp}^+ + S_{occ}'^+ + h\nu_e$
2) Reverse of Radiative Collision.	Induced Scattering.	$S_{occ}'^+ + S_{emp}^+ + h\nu_e + Nh\nu_n \rightarrow$ $S_{emp}'^+ + S_{occ}^+ + (N+1)h\nu_n$
3) Pair-Production by photon, $h\nu_e$, in nuclear field.	Pair-production in free space by 2 photons.	$S_{occ}^- + S_{emp}^+ + h\nu_e + h\nu_n \rightarrow$ $S_{emp}^- + S_{occ}^+$
4) Pair-Production by two particles.		$S_{occ}^- + S_{emp}^+ + h\nu_n' + h\nu_n'' \rightarrow$ $S_{emp}^- + S_{occ}^+$
5) Annihilation of pairs in nuclear field giving one photon.	Induced annihilation of a pair by radiation, giving two photons (one of these being identical with the inducing radiation).	$S_{emp}^- + S_{occ}^+ + Nh\nu_n \rightarrow$ $S_{occ}^- + S_{emp}^+ + (N+1)h\nu_n + h\nu_e$
6) Splitting of photon ($h\nu_e$) into two photons ($h\nu_e'$ and $h\nu_e''$) in nuclear field.	Simultaneous scattering of 2 photons by electrons in negative energy states.	$h\nu_e + h\nu_n \rightarrow$ $h\nu_e' + h\nu_e''$
7) Radiative collision due to simultaneous action of 2 particles on electrons in negative energy state.		$h\nu_{n1} + h\nu_{n2} \rightarrow$ $h\nu_e' + h\nu_e''$

field of a nucleus. The essential feature of such scattering is that we have one photon before the interaction, and afterwards one photon travelling in a different direction. The change in direction means a momentum transfer, and if the nuclear field was equivalent to radiation, this could not take place without one of the photons in the "nuclear" radiation being deflected. This would result in 2 photons after the encounter, and would therefore not represent coherent scattering. It therefore appears that coherent scattering essentially depends on the difference between the nuclear field and a radiation field. This difference vanishes as the energy of motion of the perturbed particle relative to the nucleus becomes large compared with mc^2 . This would indicate that there is only a small contribution to coherent scattering from the production of virtual pairs of positive and negative electrons with energies large compared with mc^2 .

§ 4. Excitation and Ionisation of Atoms.

The ionisation and excitation of atoms by electric particles has been considered extensively by various workers on the basis of BORN'S theory of collisions. The case of particles whose velocity is large compared with the orbital velocity of the electrons in the atoms traversed has, in particular, been accurately worked out by BETHE¹. The problem is considered here only as an example of the use of the method described in the first part of this paper, and to show how some of the main features of the problem considered by BETHE readily follow from certain well-known properties of the absorption of radiation. The consideration of this problem also makes clearer the treatment of the analogous problem of the disintegration and excitation of

¹ H. BETHE, Ann. Physik, 5, 325, (1930).

atomic nuclei by electrons, which is considered in the next section.

A complete treatment of the ionisation and excitation produced by an electric particle by the method of replacing its field with radiation is not possible, because the conditions set out in § 1 are not satisfied in close collisions in which the particle passes through the atom (impact parameter, $p < \text{atomic dimensions, } d$). The method can be applied only to more distant collisions in which the path of the particle lies outside the atom ($p > d$). We shall see, however, that the frequency of excitation and of ionisation is mainly due to these collisions. The close collisions are of a different type and are responsible only for a comparatively small number of large energy transfers to the atomic electron.

We shall consider, for definiteness, the ionisation, by electrons, of hydrogen-like atoms in the ground state (nuclear charge ze), and assume that the velocity v of the incident electron is large compared with the orbital velocity, u , of the atomic electron, i. e. $ze^2/\hbar v \ll 1$.

The intensity of the virtual radiation which represents the field of an electron in collisions with impact parameter greater than atomic dimensions, d , is given by (7) § 1, if we substitute d for p_m in that equation. As p_m occurs inside the logarithmic term in (7) an exact definition of d is not important, and for hydrogen atoms we can take it equal to the diameter of the hydrogen BOHR-orbit, i. e. $(\hbar^2/2mJ)^{1/2}$, J being the ionisation potential. Making this substitution for p_m in (7) we have, for the distribution of photons in the corresponding radiation,

$$N(\nu) d\nu = \pi^{-1} \alpha (c^2/v^2) \log (gmv^2 J/Q^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}) d\nu/\nu \quad (12)$$

$$g = 0.56 \sim 1.$$

The ionisation produced by the electron is now obtained by considering the photoelectric absorption of the virtual radiation represented by (12), and the excitation may be obtained by considering the line-absorption.¹ Actually the probability $\Phi_1(Q) dQ$ of ionisation, in which the energy transfer lies between Q and $Q + dQ$ is the product of (12), with $\nu = Q/h$, and the atomic absorption coefficient, μ , of the matter traversed for radiation of frequency $\nu = Q/h$. Thus

$$\Phi_1(Q) dQ = N(Q/h) d(Q/h) \cdot \mu(Q/h). \quad (13)$$

The theoretical value of μ has been accurately evaluated for hydrogen atoms. The exact formula is, however, rather complicated and to see more readily the form of $\Phi_1(Q)$ we shall here use the following approximate expression for μ viz.,

$$\mu(\nu) = 0.77 \pi (e^2/mc) (J/h)^{1.8} \nu^{-2.8}. \quad (14)$$

Since $J\alpha \sim Z^2$ this corresponds very nearly to the well-known "Z⁴λ³" law of photoelectric absorption. Substituting in (13) we obtain

$$\begin{aligned} \Phi_1(Q) dQ &= 0.77 (2\pi e^4/mv^2 J^2) (J/Q)^{3.8} \\ &\log(gmv^2 J/Q^2 (1 - v^2/c^2)) dQ. \end{aligned} \quad (15)$$

To obtain the total effect of the moving electron we must add to (15) the effect of close collisions in which the electron passes through the atom ($p < d$). These collisions can be very simply treated, being practically equivalent to collisions between two free electrons in which their distance of approach is of the order of d and less. The effect of such collisions between two free electrons can be readily

¹ There will also be some ionisation and excitation due to the COMPTON and RAMAN scattering of the virtual radiation, but this is quantitatively unimportant. Such scattering represents a type of radiative collision, and is considered separately in §.6.

shown to be represented by the RUTHERFORD scattering law provided we leave out the scattering through angles corresponding to momentum transfers of the order of or less than h/d . This means that the close collisions, with $p > d$, give rise to energy losses, Q , ranging from the maximum energy loss of $\frac{1}{2}mv^2$ down to about $Q \sim J$, and distributed according to the law for collisions with free electrons, viz.,

$$\Phi_2(Q) dQ = (2\pi e^4/mv^2) \left\{ \frac{1}{(1 + 4J/3Q) dQ/Q^2} \right\} (16)^1$$

For $Q \sim J$ the formula is of course correct only in order of magnitude. However, in this region of Q , we find that $\Phi_2(Q)$ is small compared with $\Phi_1(Q)$. This brings us to the result that practically all the excitation, and most of the ionising collisions with energy losses of the order of J , are due to the photoelectric effect represented by equation (15).

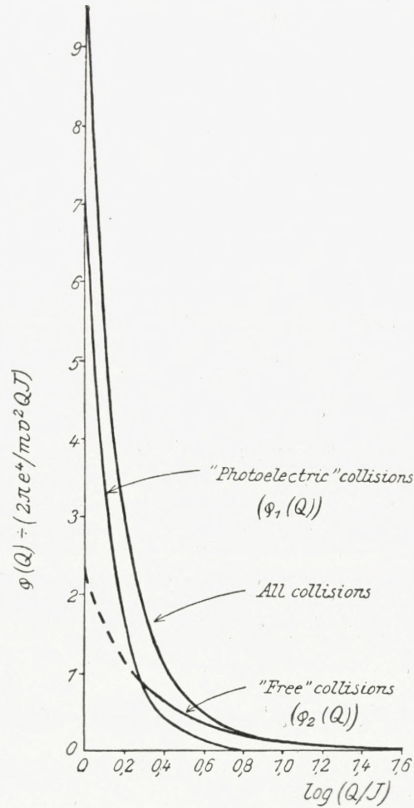


Fig. 3.

The distributions $\Phi_1(Q)$ and $\Phi_2(Q)$ are represented in fig. 3 for electrons of energy $\frac{1}{2}mv^2 = 2,500 J$.

The ordinates represent $\Phi(Q) \div (2\pi e^4/mv^2 JQ)$, and the abscissae $\log(Q/J)$, so that the area under the curves is proportional to the number of collisions. The sum of $\Phi_1(Q)$

¹ The second factor in brackets represents the effect of the motion of the atomic electrons.

and $\Phi_2(Q)$, agrees satisfactorily with the distribution due to all collisions as calculated by BETHE using BORN'S theory. It will be noticed that while both $\Phi_1(Q)$ and $\Phi_2(Q)$ increase markedly with decreasing Q , the very rapid rise in the resultant curve close to J is mainly due to the variation of $\Phi_1(Q)$. We thus see that the large concentration of energy losses close to the ionisation potential which is required by BETHE'S calculations is due to the photoelectric action of the field of the particle in distant collisions. The derivation of (15) shows that this concentration is mainly the result of the well-known rapid increase in photoelectric absorption as an absorption edge is approached. It is, however, also partly due to the fact that the density of virtual photons corresponding to the field of the particle varies as ν^{-1} .

It may be of interest to mention that according to recent calculations by WHEELER¹ and others, the photoelectric absorption does not fall off as rapidly with increasing frequency for helium as for hydrogen. The energy losses suffered by a fast particle in helium are therefore not so concentrated near the ionisation potential as in the case of hydrogen. These characteristics of helium somewhat reduce its stopping power, and an outstanding discrepancy of about 10 % between the observed stopping-power of helium and the value calculated assuming hydrogen-like wave-functions² may be accounted for in this way.

The division of the inelastic collisions of an electron with an atom, into the two classes represented by $\Phi_1(Q)$ and $\Phi_2(Q)$, is of course not perfectly sharp, the two kinds of collisions actually merging into each other. There is,

¹ J. A. WHEELER, Phys. Rev. 43, 258 (1933).

² See e. g. Proc. Roy. Soc. 135, 108 (1932).

however, in general a fairly clear distinction between them, and for a given energy loss this distinction is well exemplified by the momentum relations obeyed. The photoelectric collisions represented by $\Phi_1(Q)$ are essentially 3-body collisions involving the nucleus. By comparison with the photoelectric effect of ordinary radiation, (in which the momentum of the photoelectron is mainly balanced by a "recoil" of the nucleus) we would expect the deflection of the electron in these collisions to be much less than if it were reacted upon by the full momentum of the ejected electron. On

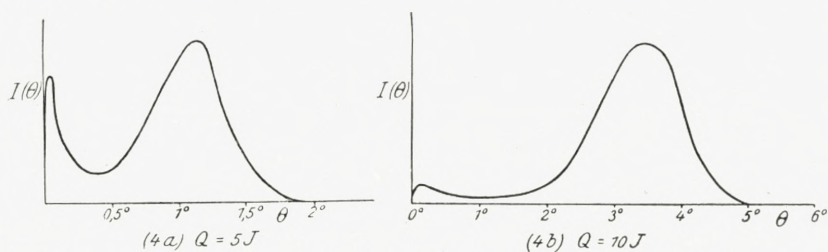


Fig. 4.

the other hand in the two-body collisions, represented by $\Phi_2(Q)$, the ionising electron takes the full reaction. These features are clearly present in the results obtained by BETHE¹ using the general method of BORN. For we find from BETHE'S calculations that the angular distribution of electrons which have suffered a given energy loss, Q , has two peaks, whose relative sizes are approximately in the ratio of $\Phi_1(Q)$ to $\Phi_2(Q)$ ². The peak at large angles corresponds to $\Phi_2(Q)$, and its maximum obeys the relation between deflection and energy loss for two-body collisions. The other peak, whose magnitude is represented by $\Phi_1(Q)$, is in the region of much

¹ H. BETHE, Ann. Physik, 5, 325, (1930).

² The existence of these two peaks has not been previously considered. It seems to be assumed in previous discussions that the peak at large angles falls uniformly with decreasing angle and that there is no second maximum at small angles.

smaller angles. Fig. 4a represents the distribution, according to BETHE'S calculations, for $Q = 5J$, and $\frac{1}{2}mv^2 = 2,500J$. 4b represents the case of $Q = 10J$. The much smaller relative size of the peak at small angles for $Q = 10J$ corresponds to the much more rapid decrease of $\Phi_1(Q)$ with Q than of $\Phi_2(Q)$ with Q .

The angular distribution of the ejected atomic electrons in the photoelectric collisions represented by equation (15) is of particular interest in connection with the one-sidedness of the field acting on the atoms in these collisions. In a distant collision (impact parameter $p >$ atomic dimensions) the component, E_1 , of the electric force acting on the atom normal to the path of the electron, is directed away from the path throughout the collision, fig. 1. The electric force in any individual FOURIER component in the FOURIER representation of E_1 is, however, quite symmetrical as regards the normal to the path of the electron. The "photoelectrons" produced by the action of any one such component are therefore also symmetrically distributed, being directed towards the path of the electron as much as away from it. In analysing the force, E_1 , into FOURIER components, and assuming these to act independently, it would therefore appear that an essential feature of the perturbation is lost. This is, however, not the case, and the symmetrical distribution of the photoelectrons is quite in accordance with the results obtained if no resolution into FOURIER components is made. For if a uniform electric force E_1 acts for a certain time on an atom in a fixed direction x , the probability of the excitation of any given state $\psi_2(r)$ is proportional to

$$\left| \iint E_1(t) x e^{2\pi(w_2 - w_1)t/h} \psi_2(r) \psi(r, t) dt dT \right|^2. \quad (17)$$

$\psi(r,t)$ represents the state of the atomic electron at time t , and depends on the perturbing force $E_1(t)$. If, however, the perturbation is small we can take $\psi(r,t)$ as constant, and equal to the ψ -function representing the undisturbed atom. In that case the force $E_1(t)$ occurs only in one place in (17), and since this is a square term its value is unaltered if we change the sign of $E_1(t)$. This means that the excited states, which may of course be states in the continuous spectrum and therefore representing photoelectrons, are symmetrical with respect to the positive and negative directions of the electric force E_1 , though E_1 may be directed along only one of these directions throughout the perturbation.

The above result assumes that the perturbation is sufficiently small that the atom may be taken to be in its initial state throughout the collision. This is, however, also the condition for considering the FOURIER components independently (§1). The condition is satisfied if $Q_{cl} \ll \epsilon$, where Q_{cl} represents the classical energy acquired by a free electron in the same field, and ϵ represents the energy difference between the initial state of the atom and the next excited state. It is interesting that for a free electron ϵ is infinitesimal, so that the condition is never satisfied. For a free electron the energy transfer is effectively due to the action of an infinite number of components of zero frequency. The phase relations between these components makes them build up to a one-sided pulse, and the velocity acquired by the electron has the same one-sidedness as in the classical theory — in accordance with EHRENFEST'S theorem.

It might be pointed out that for a bound electron traversed by a one-sided pulse, there is, classically, as well as on the quantum theory, no indication of the one-sidedness of the the pulse in the resultant motion of the electron

after the collision. This is so because the motion of the electron, being oscillatory, cannot on the average be directed in the direction of the perturbing force any more than in the opposite direction.¹

§ 5. Excitation and Disintegration of Atomic nuclei by Electrons.

The disintegration of an atomic nucleus by a moving particle A may take place through the capture of A (with or without the ejection of another particle from the nucleus), or by a process in which A only loses some of its energy, being still free after the collision. The second type of disintegration is quite analogous to the ionisation of atoms by electric particles, and can under certain conditions be divided into two classes of collisions on exactly the same basis as the ionisations of atoms considered in the previous section. This means that we can have collisions in which the nucleus is disintegrated by a photoelectric action of the particle A , and collisions in which the particle ejected from the nucleus receives the necessary energy by virtually a two-body collision with A . The essential condition for this classification is that the velocity, v , of A is large compared with the orbital velocity u , in the nucleus, of the particle, B , whose ejection from the nucleus we are considering. If the incident particle A is an α -particle, or a proton, then in practice this condition is either not satisfied or is very critical. For electrons with sufficient energy to disintegrate

¹ If the motion of the electron during the collision was watched then of course the one-sided nature of the pulse would be observed. The calculation of the effect of the pulse through a FOURIER-Integral analysis is, however, only meant to give the resultant state after the collision is over and is not concerned with the actual progress of the collision.

a nucleus the condition is, however, well satisfied, because such electrons have of necessity much greater velocity than the nuclear particles, owing to their much smaller mass. We can thus estimate the probability of nuclear disintegration by electrons by considering separately the effect of 2-body interaction with the nuclear particles, and the effect of "photoelectric" interaction with the nucleus as a whole. The former is actually of little importance, and in fact produces no disintegration at all unless the incident electrons have energy of at least 10^7 volts. This is so because of the small mass of electrons in comparison with the mass of nuclear particles. We need therefore only consider the disintegration produced by the photoelectric type of interaction.

The magnitude of the latter depends in the first place on the intensity of the virtual radiation which represents the relevant part of the field of the electron. This is given by the general expression (7) in § 1, if for p_m we substitute $h/mc\xi$, where $\xi = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, and v is the velocity of the electron.¹ It is assumed here that $h/mc\xi$ is greater than nuclear dimensions, i. e. that the energy of the electron is less than about 100 million volts. If this is not so then p_m must be taken equal to nuclear dimensions, in the same way as it is taken equal to atomic dimensions in the analogous case of the ionisation of an atom.

¹ It can be shown that the field of the electron outside a radius $h/mc\xi$, as regards its effect on the nucleus, can be replaced by radiation in accordance with the conditions set out in § 1, provided $h/mc\xi$ is greater than nuclear dimensions. The conditions are in fact somewhat strained near the lower limit, but, as in other problems, the consequent error in the final formulae concerns only a numerical coefficient in a log. term. As regards the effect of the field inside $h/mc\xi$ we may conclude that it is of no importance, because in a collision with a free particle the energy transfer from the electron is negligibly contributed to by the electronic field inside a radius r if $r \ll h/mc\xi$.

Making the substitution $h/mc\xi$ for p_m , (7) becomes

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha \log(g \xi^2 mc^2/h\nu) d\nu/\nu. \quad (18)$$

If now we denote by $\sigma(\nu)$ the cross section of the nucleus for disintegration by radiation of frequency ν , and denote the threshold frequency for disintegration by ν_0 , the cross section for nuclear disintegration in which the nucleus acquires energy between Q and $Q + dQ$ is

$$\Phi(Q) dQ = (2/\pi) \alpha \log(g \xi^2 mc^2/Q) \sigma(Q/h) dQ/Q \quad (19)$$

and the total cross section for disintegration by the electron is

$$\Phi(\xi) = (2/\pi) \alpha \int_{\nu_0}^{\infty} \log(g \xi^2 mc^2/h\nu) \sigma(\nu) d\nu/\nu. \quad (20)$$

To proceed further we must know the value of the nuclear absorption coefficient $\sigma(\nu)$. Its value for the nucleus of heavy hydrogen has been calculated by BETHE and PEIERLS¹, but it can be shown by simple arguments that its order of magnitude must in all cases obey the relation

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \sigma(\nu) d\nu = \pi E^2/Mc \quad (21)$$

where E and M are the charge and mass of the particle whose ejection from the nucleus we are considering.² We would also expect from general considerations that $\sigma(\nu)$

¹ H. BETHE and R. PEIERLS, Proc. Roy. Soc. (in publication).

² Actually if we assume that the disintegration of the nucleus consists in the separation of 2 parts whose charge and mass are E , M , and E^1 , M^1 , respectively, and if there are no states of excitation, then quite accurately

$$\int \sigma(\nu) d\nu = (\pi/c) (E/M - E^1/M^1)^2 MM^1/(M + M^1).$$

This result may be derived by simple correspondence arguments. It is only in the special case of $E/M = E^1/M^1$ that this differs greatly from E^2/Mc .

is appreciable only in the neighbourhood of the threshold. This means that the integral in (20) converges so that the integrated cross section is of the order

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) &= g_1 \alpha \log(g_2 \xi^2 mc^2/h\nu_0) \cdot (E^2/Mc\nu_0) \\ &= g_1 (2\pi e^2 E^2/Mc^2 h\nu_0) \log(g_2 \xi^2 mc^2/h\nu_0). \quad (22)\end{aligned}$$

g_1 and g_2 are factors of the order of unity. The accuracy of the formula depends on the energy of the electron being appreciably larger than the threshold energy $h\nu_0$. The energy of the electron must, however, not be too large because we have assumed that $h/mc\xi$ is larger than nuclear dimensions. If this is not satisfied then instead of (22) we find by similar calculations that

$$\sigma(\xi) = g_1 (\pi e^2 E^2/Mc^2 h\nu_0) \log(g_3 \xi Mc^2/h\nu_0). \quad (22a)$$

§ 6. Radiative Collisions. — Non Relativistic

($v/c \ll 1$).

The emission of radiation in a collision between two electric particles is obtained by the method used here by considering the scattering of the radiation with which we may replace the perturbing fields. If the two particles are an electron and an atomic nucleus then the radiation emitted is practically all due to the scattering of the virtual radiation field of the nucleus by the electron. The intensity-distribution of the radiation with which we can replace the nuclear field in this problem has already been deduced in § 1, and is given by (8) viz.

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) z \alpha^2 (c/v)^2 \log(gmv^2/h\nu).$$

ξ being taken as unity since we assume $v/c \ll 1$. v is the relative velocity of the electron and the nucleus, and the

formula actually refers to the nuclear field as it appears to an observer relative to whom the electron is initially at rest. The cross section $S(\nu) d\nu$ for the emission of a photon of frequency between ν and $\nu + d\nu$ is now the product of $N(\nu) d\nu$ and the cross section $s(\nu)$ for the scattering of a photon $h\nu$ by an electron. Under the condition $v/c \ll 1$ the frequencies involved are much less than mc^2/h , so that we can use THOMSON'S formula for $s(\nu)$ viz. $(8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$. This gives

$$S(\nu) d\nu = \left. \begin{aligned} &(2/\pi) \alpha z^2 (c^2/v^2) \log (gmv^2/h\nu) d\nu/\nu \\ &\cdot (8\pi/3) (e^2/mc^2)^2. \end{aligned} \right\} (26a)$$

This result may be expressed in terms of the energy, $E(\nu)$, of the scattered radiation per unit frequency range per unit length of path of the electron in an atmosphere containing one nucleus per unit volume, by multiplying by $h\nu$, giving finally

$$E(\nu) = (32\pi/3) (z^2 e^6/m^2 v^2 c^3) \log (gmv^2/h\nu). \quad (26)$$

Since the exact value of the factor g in the logarithmic term is not given the formula is accurate only for $mv_2/h\nu \gg 1$.¹

The direct calculation of the radiation emitted in electron-nucleus collisions, using the method of transitions between stationary states, has been carried out by SOMMERFELD², SAUTER³, and others. With the limitation $h\nu \ll mv^2$, (26), is in exact agreement with their results.

The derivation of (26) shows that, in the radiative collisions concerned, the form of the spectrum of the radiation

¹ For $h\nu \sim mv^2$ the change in velocity of the electron relative to the nucleus is comparable with the initial relative velocity, v , which, in view of the conditions given in § 1, is another reason why (26) can give only the order of magnitude of $E(\nu)$ for $h\nu \sim mv^2$.

² A. SOMMERFELD, Ann. Phys. 11, 257 (1931).

³ F. SAUTER, Ann. Phys. 18, 486 (1933).

emitted is just that of the virtual radiation with which we replace the nuclear field, the absolute intensity being simply this multiplied by the scattering coefficient. The dependence of $E(\nu)$ on ν is only through the logarithmic term in the expression for the virtual radiation. This term may be written $\log(p_{max}/p_{min})$, where $p_{max} = (v/2\pi\nu)$, is the maximum distance from the path of the nucleus at which, to an observer at rest relative to the electron, frequencies ν are found in the nuclear field (cf. fig. 2); $p_{min} = \hbar/mv$ is the effective minimum from the nucleus at which its field is important.

It is interesting to consider, on the basis of the present method, the relation of the quantum-mechanical formula (26) for $E(\nu)$ and the classical formula. The latter can be expressed as the product of the virtual radiation of the nucleus and the scattering coefficient, in just the same way as the quantum-mechanical formula. The scattering coefficient $s(\nu)$ is the same in classical theory as in quantum-mechanics, and the difference between the two cases arises from the different values of p_{min} in the logarithmic term in the representation of the nuclear field. The classical value of p_{min} is ze^2/mv^2 , as compared with \hbar/mv in the quantum theory. The classical formula is accordingly

$$E(\nu)_{class} = (32\pi/3)(z^2e^6/m^2v^2c^3) \log(g'mv^3/2\pi\nu ze^2) \quad (27),$$

and has an effective upper limit at $h\nu \sim mv^2 \div (ze^2/hv)$.

The quantum-mechanical formula (26) is based on the assumption that $(ze^2/hv) \ll 1$ i. e. $h/mv \gg ze^2/mv^2$. If this condition is reversed i. e. $ze^2/hv \gg 1$, then the derivation of (26) breaks down. As discussed in the later paper referred to in the introduction quantum-mechanics justifies, under

these conditions, a classical treatment, so that (27) approximately represents both the classical and quantum mechanical requirements.

§ 7. Radiative Collisions — Relativistic

$$(1 - v/c) \ll 1.$$

We shall consider three effects, the radiation emitted by a fast electron in collisions with an atomic nucleus, the interference between the perturbations of a fast electron by the different nuclei in a solid, and thirdly the radiation emitted by the atomic electrons due to the passage of a fast electron. The kinetic energy of the electron in these problems may be taken as $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} mc^2 = \xi mc^2$, since $\xi \gg 1$.

(a) Electron-nucleus collisions. The application of the FOURIER-Analysis method to this case was considered by the writer in a recent communication to the Physical Review¹, and it has been elsewhere carried out in detail by WEISZÄCKER². We shall here only make an approximate calculation sufficient for a discussion of the points upon which the radiative formula depends, and to make clear the analogy with the production of positive electrons by high energy photons considered in § 5³.

As in the non-relativistic case we have to calculate the scattering, by the electron, of the virtual radiation repre-

¹ E. J. WILLIAMS, Phys. Rev. 45, 729, (1934).

² C. F. v. WEISZÄCKER, Zeit. f. Phys. 88, 612, (1934).

³ The present procedure is somewhat different from that used by WEISZÄCKER, and is the same as that originally used by the writer in an application to radiative collisions (1933). The calculations made then were not sufficiently accurate to reproduce the formula obtained by HEITLER and SAUTER (Nat. Dec. 9, 1933) but that this could be done was shown by the work of WEISZÄCKER.

senting the field of the nucleus. We shall consider this scattering in a system S' in which the electron is initially at rest, because the scattering formulae in their usual form refer to stationary electrons. The velocity of the nucleus in this system is v , and since $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ the expression (8) for the radiation with which we can replace the nuclear field reduces to

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha z^2 \log(\xi mc^2/h\nu) d\nu/\nu. \quad (28)$$

We shall consider the scattering of the virtual photons represented by (28) in two parts, one with frequencies $\nu_n < mc^2/h$, the other with frequencies $\nu_n > mc^2/h$. The suffix n is added to denote the frequency of the photons before scattering. ν' shall denote the frequency after scattering, and ν the scattered frequency in the system in which the nucleus is initially at rest.

For $\nu_n < mc^2/h$ we can, to a first approximation, use THOMSON'S formula for the scattering, and also neglect the COMPTON change of wavelength, so that $\nu' = \nu_n$. The number of photons emitted in S' with frequencies between ν' and $\nu' + d\nu'$ is then

$$\left. \begin{aligned} n'(\nu') d\nu' &= (8\pi/3) (e^2/mc^2)^2 \cdot (2/\pi) \alpha z^2 \\ &\log(\xi mc^2/h\nu') d\nu'/\nu'. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

The relation between ν' in S' and the frequency ν in S is

$$\nu = \nu' (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (1 - v/c \cos \theta') = \nu' \xi (1 - v/c \cos \theta') \quad (30)$$

where θ' is the angle between the velocity v and the direction of scattering in S' . Since the THOMSON scattering is symmetrically distributed about $\theta' = \pi/2$, and since, for a given θ' , $d\nu/\nu = d\nu'/\nu'$ it follows that the number of scattered photons in the system S , with frequencies between

ν and $\nu + d\nu$, is given by (29) provided we substitute ν for ν' , i. e.

$$n(\nu) d\nu = (16/3) (e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \log(g\xi^2 mc^2/h\nu) d\nu/\nu. \quad (31)$$

This result assumes THOMSON scattering and it applies accurately only for $h\nu_n \ll mc^2$ i. e., $h\nu \ll \xi mc^2$. In this region of frequencies it agrees exactly with the results obtained by HEITLER, BETHE and SAUTER¹, by direct application of DIRAC'S electron theory using the method of transition between stationary states. We thus see that radiative energy losses appreciably less than the incident energy, ξmc^2 , of the electron — though possibly much greater than mc^2 — are due to the THOMSON scattering of low frequencies, $\nu_n \ll mc^2/h$, in the system S' .

Multiplying (31) by $h\nu$ and integrating up to $h\nu_n = mc^2$ i. e. $h\nu \sim \xi mc^2$, we obtain for the total energy loss due to $\nu_n < mc^2/h$

$$R_1 = A_1 \alpha z^2 (e^2/mc^2)^2 \log(g\xi) \xi mc^2, \quad A_1 \approx 1. \quad (32)$$

For the frequencies $\nu_n > mc^2/h$ the scattering takes place mainly in a direction $\theta' \approx (mc^2/h\nu_n)^{1/2}$, and the scattered frequency is approximately $\nu' = \nu_n \div \{1 + (h\nu_n/mc^2)\theta'^2\} \approx a\nu_n$ where a is a fraction not much less than unity. From (30) the scattered frequency in the system S is accordingly

$$\nu = a\nu_n \xi (1 - v/c \cos \theta') \approx \frac{1}{2} a \xi (mc^2/h).$$

Since $a \approx 1$, this means that for every quantum of the nuclear radiation of energy $h\nu_n > mc^2$ scattered in S' , a quantum $h\nu \approx \xi mc^2$ is emitted in S . The total energy lost by the electron in the system S , due to $\nu_n > mc^2/h$, is therefore

¹ H. BETHE and W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. 146, 83, (1934). — W. HEITLER and F. SAUTER, Nature, 132, 892 (1934).

$$R_2 = \int_{mc^2/h}^{\sim \xi mc^2/h} (e^2/mc^2)^2 (mc^2/h \nu_n) \log(h \nu_n/mc^2) \cdot \\ \cdot \alpha z^2 \nu_n^{-1} \log(g \xi mc^2/h \nu_n) d\nu_n \cdot \xi mc^2.$$

The successive factors in the integrand represent respectively the KLEIN-NISHINA scattering coefficient, the spectrum of the virtual radiation, and the energy of the emitted photon in S , all only approximately. Denoting $h \nu_n/mc^2$ by x we have

$$R_2 = A_2 (e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \xi mc^2 \int_1^{\sim \xi} x^{-2} \log x \log(g \xi/x) dx \\ = A_2 (e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \xi mc^2 \log(g \xi), \quad A_2 \sim 1. \quad (33)$$

R_2 is thus of the same order as R_1 , so that the frequencies $\nu_n > mc^2/h$ make no large addition to the radiative energy loss. This may be contrasted with classical theory, according to which the frequencies $\nu_n > mc^2/h$ increase the total effect by about $(\log \xi)^2$. This difference comes from the large difference between the KLEIN-NISHINA scattering formula and the THOMSON formula, for frequencies much above mc^2/h . The THOMSON formula is independent of the frequency, while in this region the KLEIN-NISHINA formula decreases with frequency approximately as $(mc^2/h \nu) \log(h \nu/mc^2)$. This makes the integral in (33) converge fairly rapidly. This convergence means that the relative contribution to the final radiative effect from the scattering, in the system S' , of frequencies appreciably greater than mc^2/h is very small. The bearing of this on the validity of the radiative formula has been discussed elsewhere¹.

The total energy lost by the electron, expressed in terms of the cross-section for losing all its energy, is

¹ C. F. v. WEISZÄCKER, *Zeit. f. Phys.* 88, 612, (1934). — E. J. WILLIAMS, *Phys. Rev.* 45, 729, (1934).

$$\sigma = (R_1 + R_2) \div \xi mc^2 = A(e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \log(g\xi), \quad A \sim 1, g \sim 1. \quad (34)$$

This is the same as the formula derived by HEITLER and SAUTER¹ provided we take $A = 4$, $g = 2.1$. The calculations of WEISZÄCKER² show that a more detailed application of the present method to this problem gives also the exact value of A .

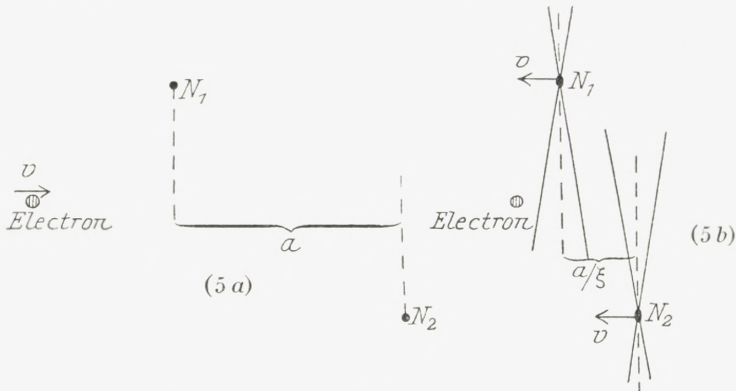


Fig. 5.

Interference between the radiative effects due to different nuclei in a solid. When an electron traverses a solid it encounters the field of different nuclei in succession, and for very high energies of the electron the perturbations due to the different nuclei will not be independent. Let us first consider the effect of two nuclei N_1 , N_2 , on opposite sides of the path of the electron, and at a distance a apart in a direction parallel to the path of the electron (fig. 5 a).

Then in a system S' in which the electron is initially at rest, the electron receives two equal and opposite pulses within a time $a/\xi c$ of each other (fig. 5 b). The FOURIER spectrum of such a field contains practically no frequencies

¹ W. HEITLER and F. SAUTER, Nature 132, 892 (1934).

² C. F. v. WEISZÄCKER, Zeit. f. Phys. 88, 612, (1934).

below $c\xi/a$. Since in S' the radiative effect due to a single nucleus comes almost entirely from the scattering of frequencies of the order of mc^2/h and less, it follows that if $c\xi/a > mc^2/h$, i. e. $\xi > amc/h$, the radiation emitted will be negligible compared with that emitted if the two nuclei acted independently. In other words the interference between the two nuclei completely cuts out the frequencies which are important to the radiative effect. The neighbouring nuclei in a solid are about $137 (\hbar/mc)$ apart, so that the interference effect for frequencies mc^2/h sets in when the energy of the electron (in S) approaches $137 mc^2$. The interference effect will, however, not always be a 'cutting out' effect, because there will be cases where successive nuclei are on the same side of the path of the electron, thus enhancing the radiative effect. A closer analysis shows that the electrons must have energy very much greater than $137 mc^2$ before the interference between the successive nuclei in a solid sensibly reduces the average radiative energy loss. Assuming the distribution of atomic nuclei in the solid to be quite regular the effect is found to set in at energies of the order of $137 \cdot z^{2/3} mc^2$. This means that for electrons traversing lead, for example, the reduction in the average radiative energy loss due to interference can be neglected unless their energy is of the order of 10^{10} volts.

Radiation from atomic electrons. In a collision between a moving electron and an atom, radiation is emitted by the atomic electrons as well as by the moving electron¹. It may readily be shown that the former is relatively very small. Its magnitude per cm of path of the

¹ The interference effect between the radiations emitted in a collision between two electrons is unimportant under the condition $1 - v/c \ll 1$.

moving electron, in an atmosphere containing 1 atom per cc. is

$$R = \int_0^{\xi mc^2/h} zN(\nu) \sigma(\nu) h\nu d\nu.$$

$N(\nu)$ is the density of photons in the virtual radiation representing the field of the moving electron $\sigma(\nu)$ is the, KLEIN-NISHINA scattering coefficient per electron, and z is the number of electrons per atom. On integration we find

$$R = (1/3) \alpha z (e^2/mc^2)^2 mc^2 (\log \xi)^3. \quad (35^1)$$

The ratio of this to the radiation emitted by the moving electron, represented by (34), is of the order of $(\log \xi)^3 / z \xi \log(137 z^{-1/3})$. This ratio is in all cases very small.

§ 8. Production of Electron-Pairs by a High energy Photon in the field of an atomic nucleus.

The annihilation of a pair of positive and negative electrons giving two photons, and the converse process of the creation of an electron-pair by two photons, were the consequences of his theory of the electron first considered by DIRAC. As regards the second process it was evident that the intensity of radiation necessary to give a detectable effect would not be available in practice, and it appeared that the theoretical possibility of the creation of electron-pairs was outside experimental test. We now know that this is not so, and that if instead of using two beams of radiation we irradiate ordinary matter with one beam then it is possible to create electron pairs to a measurable degree. Under these conditions a pair is produced not by the action of two photons as considered by DIRAC, but by a photon

¹ This also applies to protons of the same velocity, i. e. protons with energy ξMc^2 where M is the mass of the proton.

and an atomic nucleus. If, however, we think of the perturbing field of the nucleus in terms of its FOURIER components, according to the method of the present paper, we find that the two effects are really closely connected. In the case of a photon, whose energy is large compared with mc^2 , the connection between the two effects is indeed very close, and the formula for pair-production by such a photon and a nucleus may readily be expressed in terms of the formula for pair-production by two photons.

The latter was recently derived by BREIT and WHEELER¹, and is of course also implied in DIRAC'S annihilation formula. For two photons $h\nu_1 = xmc^2$, $h\nu_2 = ymc^2$, travelling in opposite directions, BREIT and WHEELER'S result, in terms of cross section is

$$\sigma(x, y) = \pi(e^2/mc^2)^2 \{ 2\theta u^{-2} + 2\theta u^{-4} - \theta u^{-6} - (u^2 - 1)^{1/2} (u^{-3} + u^{-5}) \} \quad (36),$$

$$u^2 = xy, \theta = \cosh^{-1} u$$

the threshold frequencies being given by

$$x \cdot y = 1. \quad (36a)$$

It will be noticed that the effect depends on the product of x and y , which is in accordance with the LORENTZ invariance of this product.

¹ BREIT and WHEELER, Bull. American Phys. Soc. 9, 34, (1934). In a communication to the writer the authors have pointed out that their formula quoted in this publication must be divided by 2 on account of a slip in the calculations, and by another factor of 2 on account of their different definition of cross section. The cross section, σ , used here is the more usual one and is such that if in one beam N_1 photons cross unit area, and in the other beam travelling in the opposite direction N_2 photons cross unit area, then $N_1 N_2 \sigma$ is the number of pairs produced per unit area perpendicular to the directions of propagation. The cross section σ' used by BREIT and WHEELER is such that if there are n_1 photons per unit volume in one beam and n_2 in the other, then $n_1 n_2 c \sigma'$ is the number of pairs produced per second per unit volume. It can be shown that $\sigma = \frac{1}{2} \sigma'$.

We shall now derive from (36) the formula for pair-production by a high energy photon and a nucleus. Let the energy of the incident photon in the system, S , in which the nucleus is at rest, be ξmc^2 . To bring out the correspondence between this effect and the radiative effect we shall consider a system S' in which the nucleus is moving in the opposite direction to the photon with a velocity v given by $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\xi$. The transformation to this system reduces the energy of the photon to mc^2 .¹ The photon distribution in the virtual radiation field to which the nuclear field in the system S' is equivalent, is, from (8),

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha z^2 \log(g \xi mc^2/h\nu) d\nu/\nu, \quad g \sim 1. \quad (28)$$

The "nuclear" photons travel in the opposite direction to the "external" photon, mc^2 , and the cross-section for the production of a pair in terms of formula (36) for the production of pairs by 2 photons, is

$$\sigma(\xi) = \int_{mc^2/h}^{\xi mc^2/h} N(\nu) d\nu \sigma(1, h\nu/mc^2). \quad (37)$$

Using the BREIT-WHEELER formula for $\sigma(x, y)$ this gives on integration

$$\sigma(\xi) = (28/9) \alpha z^2 (e^2/mc^2)^2 \log(g \xi). \quad (38)$$

Apart from the actual value of the numerical factor g inside the logarithmic term, which cannot be determined by the present method, this formula is identical with the formula for pair-production by high-energy photons derived by direct

¹ Strictly speaking to $mc^2 \div \left\{ 1 + \left(1 - \frac{4}{\xi^2} \right)^{1/2} \right\}$, but since we assume $\xi \gg 1$ we can take this, for simplicity, as mc^2 . The use of the exact value would require a corresponding change in the lower limit to the integral in (37), leaving the result unchanged.

application of DIRAC'S theory by HEITLER and SAUTER¹, and by NISHINA, TOMONAGA and SAKATA².

(38) is of exactly the same form as the radiative formula (34). The correspondence between the two effects, according to the present method of calculation, arises from the correspondence between the KLEIN-NISHINA scattering formula and the BREIT-WHEELER pair-production formula. For frequencies large compared with mc^2/h the KLEIN-NISHINA scattering cross section is of the order of

$$(e^2/mc^2)^2 (mc^2/h\nu) \log(h\nu/mc^2) \quad (39)$$

and this also represents the order of magnitude of the cross section (36) for pair-production by a photon $h\nu \gg mc^2$ and a photon $h\nu = mc^2$, travelling in opposite directions. Using this approximate form, and substituting x for $h\nu/mc^2$ (37) becomes

$$\sigma(\xi) \approx (e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \int_1^{\sim \xi} x^{-2} \log x \log(g\xi/x) dx. \quad (40)$$

The integral in this expression is exactly the same as that which occurs in the expression (33) for the radiative effect, and its rapid convergence shows that, as in the radiative effect, it is only frequencies in the nuclear field of the order of mc^2/h that are important.

The convergence of the integral in (33) and (40) is, in fact, essential to the full applicability of the present method. In the system S' the nucleus moves with a velocity v given by $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sim \xi$, and the replacement of its field by the radiation represented by (28) is valid only if the per-

¹ W. HEITLER and F. SAUTER, Nature 132, 892, (1934).

² V. NISHINA, S. TOMONAGA and S. SAKATA, Scientific Papers Japanese Inst. Phys. and Chem. Res., 24, 1, (1934).

turbed particles have velocities u satisfying $(1 - u^2/c^2)^{-1/2} \ll (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. If this is not so then the fact that the nuclear field in S' , is not travelling with exactly the velocity of light can, as it were, be found out by the perturbed particles. Now since in the system S' the pair production is due to the interaction of photons of energy of the order of mc^2 , the energy of the positive and negative electrons produced is also of this magnitude. In other words if we denote by u the order of magnitude of the velocity of the electrons concerned in the phenomenon (whether in the negative energy state before interaction, or in a state of positive energy after) then $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ is of the order of unity, and therefore the above condition is satisfied since $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sim \xi \gg 1$. Similarly in the radiative effect the velocity u of the electron in S' (acquired through the scattering of the 'nuclear' radiation), is such that $(1 - u^2/c^2)^{-1/2} \sim 1$, because the frequencies concerned in the scattering are of the order of only mc^2/h .

Finally we shall refer to the effect of shielding and to the dimensions of the region around the nucleus from which pairs are produced. This region depends upon the distance from the nucleus at which frequencies sufficiently high to satisfy the threshold condition, (36 a), for pair production, are present in the nuclear field. Now in the system S' in which the "external" quantum has energy mc^2 the threshold frequency for the "nuclear" radiation is also mc^2 . Frequencies of this order are present to an appreciable extent in the field of an unshielded nucleus out to a distance p_{max} given by $p_{max}/\xi \sim \hbar/mc$ so that $p_{max} \sim \xi(\hbar/mc)$. As a result the region for pair production by a photon $h\nu = \xi mc^2$ extends to a distance $\xi(\hbar/mc)$ from the nucleus.

If the distance $\xi(\hbar/mc)$ is comparable with or greater than atomic dimensions then the shielding of the nuclear

field by the atomic electrons will evidently reduce the cross section for pair-production. Assuming the shielding effect to be a sudden cutting off of the nuclear field at $r = z^{-1/3} \cdot \text{hydrogen radius}$, then if $\xi > \alpha^{-1} z^{-1/3}, = 137 z^{-1/3}$, the virtual radiation of the nucleus is given by (9), and the pair production formula is obtained by replacing ξ in the log term in (38) by $137 \cdot z^{-1/3}$.

§ 9. Production of Electron-pairs in collisions between two particles, with relative velocity v satisfying $(1 - v/c) \ll 1$.

The cross-section for this effect may be derived by the present method by replacing the field of one of the particles by radiation and then consider the production of pairs by this virtual radiation in the field of the other particle, using the formula given in the previous section. It may also be derived by replacing the fields of both particles with radiation and starting with the BREIT-WHEELER formula, but after one integration equivalent to that made in the previous section (to derive the effect of a photon and a nucleus from the effect of two photons) this procedure is identical with the first.

Let v be the relative velocity of the two particles A_1 and A_2 , and let $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \xi$. In a system S in which A_1 is at rest the distribution of photons which represents the field of A_2 (charge $z_2 e$) is

$$N(\nu) d\nu = (2/\pi) \alpha z_2^2 \log(g \xi mc^2/h\nu) d\nu/\nu. \quad (28)$$

The cross-section $\sigma_p(E) dE$ for the creation of a pair of total energy between E and $E + dE$ (including energy of mass) is now the product of $N(\nu) d\nu$, with $\nu = E/h$, and

the cross section for the production of a pair by a photon of energy E in the field of the stationary particle A_1 (charge z, e). Substituting for the latter the value given by (38) we accordingly have

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p(E) dE &= (2/\pi) \alpha \xi_2^2 \log(g \xi mc^2/E) dE/E \cdot \\ &\cdot (28/9) \alpha z_1^2 (e^2/mc^2)^2 \log(g' E/mc^2) \\ &= (56/9\pi) \alpha^2 z_1^2 z_2^2 (e^2/mc^2)^2 \log(g \xi mc^2/E) \\ &\quad \log(0.14 E/mc^2) dE/E. \end{aligned} \right\} (41)^1$$

The maximum frequency in the virtual radiation of A_2 is of the order $\xi mc^2/h$, so that the cross-section for the production of a pair of any energy is $\int_{2mc^2}^{\xi mc^2} \sigma_p(E) dE$. On integration this gives

$$\sigma_p(\xi) = (28/27\pi) \alpha^2 z_1^2 z_2^2 (e^2/mc^2)^2 (\log g \xi)^3. \quad (42)^2$$

With regard to this integrated cross-section it is important that its value is little dependent on the exact value of the differential cross-section $\sigma_p(E)$ near the limits $E_{min} \sim mc^2$ and $E_{max} \sim \xi mc^2$. By virtue of this it is only the numerical coefficient g inside the log term that is affected by the considerations, first that the formula used for pair-production by a photon and a nucleus is correct only in order of magnitude for $E \sim mc^2$, and secondly that for $E \sim \xi mc^2$ the velocities of the corresponding positive and negative electrons do not satisfy the condition for the accurate replacement of the field of A_2 by radiation.

¹ In the second expression we have substituted for g' the exact numerical value given by the calculations of HEITLER and SAUTER.

² The form of this expression is in agreement with calculations of pair-production by two particles carried out by LANDAU and LIFSHITZ (Nature, 134, 109 (1934)), in so far as their results are published.

(42) is also valid if one or both of the particles are electrons¹. This is so because the effect of the reaction on the electrons in a pair-producing collision is negligible unless the energy E of the pairs produced is of the order of ξmc^2 . As mentioned in the preceding paragraph pairs of this energy do not make a significant contribution to the integrated cross-section, and a first order change in their number only affects the numerical coefficient g inside the logarithmic term. For an electron of energy ξmc^2 , and a nucleus charge ze , we can therefore still use (42). We must of course substitute unity for z_2 , and take z_1 equal to the atomic number z , so that the cross section is

$$\sigma_{electron} = (28/27\pi) \alpha^2 z^2 (e^2/mc^2)^2 (\log g \xi)^3. \quad (43)$$

The shielding of the nucleus by the atomic electrons comes in, in this case, through its effects on the formula for pair-production by a photon and a nucleus used in the derivation of (41). It follows from the results of the preceding section that the differential cross-section given by (41) is unaffected by shielding if E is less than about $137 mc^2 z^{-1/3}$, while if E is much greater than this then in the second logarithmic term in (41) $(0.14E/mc^2)$ must be replaced by $(137 z^{-1/3})$.

§ 10. Splitting of a photon in the field of an electric particle.

In addition to producing a pair of positive and negative electrons the interaction of two photons with electrons in negative energy states may result in a scattering process,

¹ The value of the numerical coefficient g in the logarithmic term will, however, be slightly different for electrons than for heavier particles.

without pair-production. An interaction of this kind between a photon and a virtual photon in the field of an electric particle would result in the latter being scattered from the field of the particle. The process may be compared with the scattering of the virtual radiation in a radiative collision (§ 7), the main difference being that here the scattering is performed by an electron in a negative energy state in the presence of another photon.

An encounter of a photon with an electric particle may thus result in the production of another photon. In the system in which the electric particle is at rest the two photons which are present after the collision must of course have a resultant energy equal to that of the incident photon. The effect would therefore appear as a splitting of the incident photon in the field of the electric particle. While the present method of considering the problem clearly indicates the possibility of this effect, its application to a quantitative treatment is not as straightforward as in the problems considered in previous sections. This is so because the scattering of two photons involves the formation of virtual pairs of all possible energies, and some of these energies may violate the conditions of applicability given in § 1.

Let us, however, consider a photon $h\nu = \xi mc^2$. $\xi \gg 1$, incident on a stationary nucleus, ze . In a system, S' , moving with the photon with a velocity v given by $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \frac{1}{2} \xi$ the energy of the photon is mc^2 , while the nuclear field is equivalent to a distribution of photons of frequency ranging from zero to ξmc^2 , the number per unit frequency range according to (7) being of the order $\alpha z^2 \nu^{-1} \log \left(\frac{\xi mc^2}{h\nu} \right)$. The theoretical cross-section for the scattering of two photons has not been completely worked out, but recent calculations

by HEISENBERG¹ show that for a photon mc^2 and a photon $h\nu$, $< mc^2$, moving in opposite directions, it is of the order of $\alpha^2 (e^2/mc^2)^2 (h\nu/mc^2)^5$. The rapid decrease with decreasing $h\nu$ means that the contribution to the cross-section for "splitting" from the virtual photons with $h\nu \ll mc^2$ is negligible. The contribution from the virtual photons with $h\nu \sim mc^2$ is of the order of

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{splitting}} &\sim \alpha^2 (e^2/mc^2)^2 \alpha z^2 \log \xi \\ &\sim \alpha^3 z^2 (e^2/mc^2) \log \xi. \end{aligned} \quad (47)$$

HEISENBERG does not actually give the scattering cross-section for photons with $h\nu \gg mc^2$, but it is unlikely that the effect of such photons in the virtual radiation of the nucleus makes any significant addition to (47). It will be noticed that the cross-section given by (47) is about α^{-2} , = 137², times less than the cross section for pair-production by the same photon.

Summary.

The conditions for replacing the field of an electric particle in collision problems by a radiation field, are considered, and a general formula for the spectrum of the equivalent radiation is given. By using the appropriate form of the spectrum formula several effects produced by electric particles are readily deduced from results in radiation theory. The phenomena considered in this way include the ionisation of atoms by electric particles, nuclear disintegration by fast electrons, radiative collisions, production of electron pairs in the field of an atomic nucleus by high energy photons and electrons, and the splitting of a photon in a nuclear

¹ W. HEISENBERG, Zeit. Phys. (1934).

field. The method of treatment provides a new way of regarding these problems and in some cases it shows that the theoretical basis of the existing formulae is very simple.

The calculations described in this paper were carried out at the Institute for Theoretical Physics, Copenhagen, (1933—34) and the writer has great pleasure in thanking Professor N. BOHR for his very kind and helpful interest. He wishes also to acknowledge the help derived from discussions with MESSRS. F. KALCKAR, M. S. PLESSET, E. TELLER and J. A. WHEELER.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 5.

ZWEI BAHNKLASSEN IM PROBLÈME RESTREINT

VON

JENS P. MÖLLER

MIT 2 TAFELN



KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Die zwei Bahnklassen, die hier behandelt werden sollen, sind die folgenden: I. Die retrograden Bahnen um die eine Masse und II. Die Librationen um den Librationspunkt L_1 . In beiden Fällen ist die Entwicklung bis zum definitiven Abschluss der Klassen verfolgt worden.

Die erste Behandlung dieser zwei Klassen ist für I von C. BURRAU und E. STRÖMGREN¹ und von J. FISCHER-PETERSEN², für II von C. BURRAU und E. STRÖMGREN³ gegeben worden. Der unterzeichnete hat die Fortsetzung der Untersuchung dieser zwei Klassen übernommen. Die Hauptresultate sind in der Publikation 60 des Kopenhagener Observatoriums (A. N. 5574) mitgeteilt worden; in der vorliegenden Abhandlung werden die gesamten Resultate der numerischen Rechnung gegeben.

I. Die retrograden Bahnen um die eine Masse und ihre Fortsetzung. Die Fig. a—f, Tafel I, zeigen die Entwicklung dieser Klasse. Sie fängt mit unendlich kleinen retrograden Kreisbahnen um m_2 an, mit einem unendlich grossen Wert der Jacobischen Konstante K . Mit wachsenden Dimensionen der Bahnen nimmt der K -Wert ab, die Bahn aber ist immer noch bei einem Radius von etwa 1 fast kreisförmig (Fig. a). Nachher tritt an der der Masse m_1 zu-

¹ A. N. 4836 (Publ. Kopenh. 23).

² A. N. 4837 (Publ. Kopenh. 23).

³ A. N. 4721 (Publ. Kopenh. 18).

gewandten Seite eine Einbuchtung auf (Fig. b), und die weitere Entwicklung führt zu einer Bahn mit Ejektion in m_1 (Fig. c) [l. c.¹].

Der K -Wert variiert, er steigt und fällt abwechselnd⁴; die weitere Entwicklung der Klasse ersieht man aus Fig. d, e und f. Wenn man diese Figuren betrachtet, wird man auf eine Weiterentwicklung nach dem folgenden Schema schließen: Nach der Ejektionsbahn kommt eine Bahn mit Schleife um m_2 ; diese Schleife erweitert sich bis zur Ejektionsbahn in m_1 , u. s. w. In dieser Weise entstehen Bahnen mit einer immer zunehmenden Anzahl Windungen. In der Publ. 60 ist gezeigt worden, dass die Entwicklung der Klasse tatsächlich in dieser Weise vor sich geht.

Wir haben in Publ. 60 die Gleichung einer Bahn für die unendlich kleine Masse abgeleitet, die unter der Voraussetzung zu Stande kommt, dass wir uns die zwei endlichen Massen im Anfangspunkt des Koordinatensystems vereinigt und die Bewegung im absoluten Koordinatensystem als geradlinig von diesem Punkt ausgehend denken, bis zu einer bestimmten Maximaldistanz, wo sie umkehrt und wieder — geradlinig — in den Anfangspunkt einstürzt, u. s. w. Wenn die unter diesen Voraussetzungen geltende Bewegungsgleichung für die unendlich kleine Masse auf das rotierende Koordinatensystem (ϱ, θ) bezogen wird, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{16\varrho}{K^2} - \frac{\varrho^2}{K} - \frac{8}{K^{3/2}}} \cdot \arccos\left(1 - \frac{K\varrho}{8}\right) \quad (1)$$

In der Publ. 60 ist diese theoretische Bewegung mit derjenigen der gerechneten Bahnen, bei der die unendlich

⁴ In bezug auf die Charakteristik der Klasse (die Abhängigkeit des K -wertes von den Anfangswerten) s. Publ. 60.

kleine Masse sich am weitesten von dem Anfangspunkt entfernt (der Bahn Fig. f), verglichen. Sie gab eine gute Übereinstimmung in bezug sowohl auf Form wie auf Umlaufzeit.

II. Die Librationen um L_1 und ihre Fortsetzung.

Die Fig. g—l, Tafel II, zeigt die Entwicklung dieser Klasse. Die unendlich kleinen Librationen um L_1 sind Ellipsen, deren grosse Achse in der η -Achse und deren kleine Achse in der ξ -Achse fällt. Das Verhältniß der zwei Achsen ist

$$\frac{\sqrt{8\sqrt{2}-3}}{4\sqrt{2+7}} = 0.227\ 8093 \text{ (s. C. BURRAU und E. STRÖMGREN$$

l. c.³). K hat den Wert 16. Wenn wir die Entwicklung der Klasse verfolgen, nimmt K anfangs ab, die Bahnen bleiben sehr nahe elliptisch mit nahezu demselben Verhältniß zwischen den beiden Achsen. Innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit gilt dies immer noch bei der Bahn Fig. g. Nachher treten Einbuchtungen rechts und links auf (Fig. h), und allmählich kommt man — mit variierenden K -Werten⁵ — zur Ejektionsbahn in m_1 und m_2 (Fig. i). In der Publ. 60 ist die weitere Entwicklung erwähnt worden; sie geht aus Fig. j—l hervor und ist der oben besprochenen Entwicklung der retrograden Bahnen um m_2 vollständig analog, indem man auch hier mit einer Bewegung zu tun hat, die im festen Achsensystem angenähert geradlinig vor sich geht und in dem rotierenden Achsensystem durch dieselbe Gleichung (1) wie die vorige Klasse dargestellt wird.

Wie oben erwähnt, ist das erste Gebiet der Entwicklung der jetzt besprochenen beiden Bahnklassen von C. BURRAU und E. STRÖMGREN behandelt worden. Die Bahnen Fig. a—c

⁵ In bezug auf die Charakteristik s. Publ. 60.

finden sich l. c.¹, während die Bahnen Fig. g—i die in l. c.³ beschriebene Entwicklung wiedergibt. Die Bahnen Fig. g und Fig. h sind jedoch später gerechnet worden, s. die Übersicht über die gerechneten Bahnen auf S. 7 (Bahnen 1—4).

Die numerischen Resultate, die die Entwicklung der zwei Klassen über die Ejektionsbahnen in Fig. c und Fig. i hinaus geben, sind die Bahnen 5—11 in der Übersicht auf S. 7. Es handelt sich um 6 direkt gerechnete Bahnen (die Bahnen 5, 6, 8, 9, 10 und 11), mit Hilfe deren die 6 periodischen Bahnen Fig. d—f und Fig. j—l interpoliert oder extrapoliert sind, die eine (Bahn 7, Fig. e) numerisch, die anderen graphisch. Dass die Anzahl direkt gerechneter Bahnen so verhältnismässig gering ist, liegt daran, dass vorher, vor den 5-stellig gerechneten Bahnen, eine Anzahl mit Rechenschieber und entsprechend geringerer Genauigkeit (3 Stellen in den Koordinaten) gerechnet wurden. Diese Bahnen dienten als Unterlage für die Ermittlung der Anfangswerte der nachher 5-stellig gerechneten Bahnen. Der wesentlichste Teil der 5-stelligen Rechnungen ist von den Herren N. BENNEDSEN (Helsingör), F. BURMEISTER (München) und M. LÖKKEGAARD (Kopenhagen) und von Frl. E. MACKEPRANG und Frau G. SKADE (beide Kopenhagen) ausgeführt worden.

Im folgenden geben wir zunächst eine Übersicht über die Anfangswerte und die K -Werte für alle oben besprochenen 5-stellig gerechneten und für die in den Figuren gezeichneten Bahnen dieser zwei Klassen und darnach die numerischen Resultate für die bisher nicht veröffentlichten 5-stelligen Bahnrechnungen.

ÜBERSICHT ÜBER DIE GERECHNETEN UND GEZEICHNETEN BAHNEN. DIE NUMMERN DER ERSTEN KOLONNE BEZIEHEN SICH AUF DIE NEU GERECHNETEN BAHNEN.

Bahn Nr.	Gerechnete Bahnen	Retrograde Bahnen um m_2 .	Gezeichnete periodische Bahnen. Librationen um L_1 .
1.	$F_0 = 0, E'_0 = 0$ $E_0 = +1.5, K = 5.40091$ $E_0 = +2.2, K = 4.191$ $E_0 = 0, K = 7.1776$ $E_0 = +1.425, K = 13.8$ $K = 14.0$	Fig. a. Numerisch interpoliert ¹ Fig. b. Numerisch interpoliert ¹ Fig. c. Numerisch interpoliert ¹	{ Fig. g. $K = 13.90$. Graphisch interpoliert } { Fig. h. $K = 9.7$. Graphisch extrapoliert }
2.	$E_0 = +0.9, K = 9.8$ $K = 10.0$		Fig. i. Numerisch interpoliert ²
3.	$E_0 = 0, K = 8.7316$		
4.	$\eta_0 = 0, \xi'_0 = 0$ $\xi_0 = 0, K = 0.4$ $K = 0.8$ $\xi_0 = +0.4, K = 0.7386$ periodisch	Fig. d. $K = 1.18$. Graphisch extrapoliert Fig. e.	{ Fig. l. $K = 0.59$. Graphisch interpoliert }
5.	$K = 0.8$ $K = 0.8$ $K = 1.0$	Fig. e = Bahn 7, $K = 0.7386$. Numerisch extrapoliert	{ Fig. j. $K = 1.8$. Graphisch extrapoliert }
6.	$K = 0.8$ $K = 1.0$		
7.	$K = 0.8$ $K = 1.0$		
8.	$F_0 = 0, E'_0 = 0$ $E_0 = 0, K = 5.9$ $K = 6.0$	Fig. f. $K = 5.9612$. Graphisch interpoliert	{ Fig. k. $K = 6.5$. Graphisch extrapoliert }
9.			
10.			
11.			

¹ C. BURRAU und E. STRÖMGREN I. c.¹² C. BURRAU und E. STRÖMGREN I. c.³

Bahn 1.

$$E_0 = + 1.425, \quad K = 13.8$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 1.42500	0.00000	+ 0.14528	0.00000
0.04	1.42578	+ 0.06330	0.14480	— 0.06268
0.08	1.42816	0.12598	0.14330	0.12504
0.12	1.43217	0.18742	0.14062	0.18671
0.16	1.43788	0.24698	0.13659	0.24730
0.20	1.44536	0.30396	0.13092	0.30624
0.24	1.45469	0.35764	0.12329	0.36285
0.28	1.46594	0.40728	0.11347	0.41633
0.32	1.47914	0.45209	0.10104	0.46569
0.36	1.49426	0.49132	0.08588	0.50983
0.40	1.51120	0.52419	0.06793	0.54755
0.44	1.52978	0.55004	0.04736	0.57771
0.48	1.54976	0.56828	0.02452	0.59924
0.52	1.57078	0.57847	+ 0.00002	0.61128
0.56	1.59246	0.58032	— 0.02541	0.61331
0.60	+ 1.61439	+ 0.57376	— 0.05095	— 0.60518

Bahn 2.

$$E_0 = + 1.425, \quad K = 14.0$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 1.42500	0.00000	+ 0.14528	0.00000
0.04	1.42566	+ 0.06078	0.14489	— 0.06018
0.08	1.42767	0.12096	0.14369	0.12002
0.12	1.43104	0.17994	0.14156	0.17915
0.16	+ 1.43584	+ 0.23711	+ 0.13835	— 0.23715

ψ	E	F	ξ	η
0.20	+ 1.44210	+ 0.29180	+ 0.13384	— 0.29350
0.24	1.44986	0.34335	0.12783	0.34759
0.28	1.45916	0.39105	0.12003	0.39860
0.32	1.47000	0.43420	0.11027	0.44569
0.36	1.48230	0.47207	0.09842	0.48788
0.40	1.49593	0.50401	0.08449	0.52415
0.44	1.51069	0.52943	0.06869	0.55351
0.48	1.52630	0.54780	0.05132	0.57504
0.52	1.54240	0.55876	0.03294	0.58805
0.56	1.55859	0.56207	+ 0.01419	0.59209
0.60	+ 1.57442	+ 0.55770	— 0.00420	— 0.58705

Bahn 3.

$$E_0 = + 0.9, \quad K = 9.8.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89925	+ 0.12788	0.62708	— 0.10039
0.08	0.89714	0.25566	0.64435	0.20199
0.12	0.89418	0.38318	0.67270	0.30612
0.16	0.89118	0.51017	0.71207	0.41425
0.20	0.88939	0.63620	0.76173	0.52815
0.24	0.89050	0.76060	0.81991	0.64996
0.28	0.89667	0.88244	0.88345	0.78243
0.32	0.91057	1.00042	0.94668	0.92875
0.36	0.93524	1.11288	1.00078	1.09224
0.40	0.97389	1.21775	1.03302	1.27523
0.44	1.02946	1.31257	1.02665	1.47689
0.48	1.10397	1.39448	0.96331	1.68996
0.52	1.19766	1.46050	0.82755	1.89775
0.56	+ 1.30830	+ 1.50774	+ 0.61472	— 2.07399

ψ	E	F	ξ	η
0.60	+ 1.43090	+ 1.53378	+ 0.33826	— 2.18839
0.64	1.55800	1.53734	+ 0.03115	2.21845
0.68	1.68126	1.51847	— 0.26371	2.15986
0.72	+ 1.79304	+ 1.47867	— 0.50860	— 2.02845

Bahn 4.

$$E_0 = + 0.9, \quad K = 10.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.90000	0.00000	+ 0.62161	0.00000
0.04	0.89915	+ 0.12711	0.62730	— 0.09979
0.08	0.89675	0.25408	0.64440	0.20065
0.12	0.89326	0.38074	0.67287	0.30386
0.16	0.88950	0.50678	0.71242	0.41071
0.20	0.88666	0.63174	0.76237	0.52279
0.24	0.88635	0.75494	0.82114	0.64207
0.28	0.89065	0.87542	0.88569	0.77095
0.32	0.90208	0.99191	0.95083	0.91231
0.36	0.92349	1.10278	1.00843	1.06916
0.40	0.95788	1.20606	1.04688	1.24369
0.44	1.00796	1.29942	1.05106	1.43544
0.48	1.07557	1.38030	1.00454	1.63855
0.52	1.16096	1.44602	0.89289	1.83926
0.56	1.26217	1.49408	0.71073	2.01543
0.60	1.37476	1.52247	0.46764	2.14088
0.64	1.49222	1.53008	+ 0.18975	2.19422
0.68	1.60698	1.51701	— 0.08641	2.16817
0.72	+ 1.71201	+ 1.48455	— 0.32649	— 2.07236

Bahn 5.

$$\xi_0 = 0, \quad K = 0.4.$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	0.00000	2.4	-2.25779	+4.12923
0.05	-0.00988	-0.19659	2.5	1.85262	4.43081
0.10	0.03962	0.38807	2.6	1.40878	4.68854
0.15	0.08920	0.57033	2.7	0.93141	4.89782
0.20	0.15808	0.74050	2.8	-0.42615	5.05466
0.25	0.24518	0.89664	2.9	+0.10093	5.15573
0.30	0.34897	1.03742	3.0	0.64340	5.19840
0.35	0.46772	1.16192	3.1	1.19454	5.18078
0.40	0.59955	1.26944	3.2	1.74742	5.10174
0.45	0.74259	1.35949	3.3	2.29499	4.96097
0.50	0.89496	1.43176	3.4	2.83020	4.75896
0.55	1.05486	1.48608	3.5	3.34605	4.49699
0.60	1.22050	1.52239	3.6	3.83570	4.17717
			3.7	4.29253	3.80239
0.7	1.56228	1.54138	3.8	4.71030	3.37628
0.8	1.90759	1.49050	3.9	5.08319	2.90321
0.9	2.24496	1.37308	4.0	5.40588	2.38819
1.0	2.56424	1.19360	4.1	5.67364	1.83685
1.1	2.85663	0.95751	4.2	5.88212	1.25532
1.2	3.11460	0.67096	4.3	6.02887	0.65022
1.3	3.33187	-0.34061	4.4	6.11043	+0.02851
1.4	3.50332	+0.02654	4.5	6.12530	-0.60261
1.5	3.62490	0.42330	4.6	6.07255	1.23574
1.6	3.69356	0.84232	4.7	5.95208	1.86341
1.7	3.70716	1.27624	4.8	5.76462	2.47820
1.8	3.66446	1.71770	4.9	5.51174	3.07279
1.9	3.56504	2.15942	5.0	5.19581	3.64008
2.0	3.40932	2.59424	5.1	4.81999	4.17326
2.1	3.19845	3.01520	5.2	4.38815	4.66595
2.2	2.93436	3.41558	5.3	3.90486	5.11214
2.3	-2.61970	+3.78894	5.4	+3.37532	-5.50647

t	ξ	η	t	ξ	η
5.5	+2.80528	-5.84410	6.0	-0.42050	-6.56137
5.6	2.20100	6.12087	6.1	1.09033	6.49713
5.7	1.56915	6.33332	6.2	1.75092	6.36288
5.8	0.91673	6.47872	6.3	-2.39480	-6.15990
5.9	+0.25103	-6.55512			

Bahn 6.

 $\xi_0 = 0, K = 0.8.$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	0.00000	1.04	-2.63362	-1.06323
0.04	-0.00624	-0.15550	1.12	2.85036	0.86100
0.08	0.02501	0.30836	1.20	3.04334	0.62848
0.12	0.05636	0.45631	1.28	3.20953	0.36930
0.16	0.10016	0.59756	1.36	3.34645	-0.08722
0.20	0.15608	0.73082			
0.24	0.22355	0.85513	1.52	3.52478	+0.53037
0.28	0.30179	0.96978	1.68	3.56736	1.19359
0.32	0.38996	1.07424	1.84	3.46942	1.87215
0.36	0.48712	1.16808	2.00	3.23176	2.53676
0.40	0.59230	1.25100	2.16	2.86026	3.15968
0.44	0.70452	1.32272	2.32	2.36540	3.71524
0.48	0.82285	1.38310	2.48	1.76198	4.18042
0.52	0.94630	1.43200	2.64	1.06849	4.53536
0.56	1.07396	1.46938	2.80	-0.30666	4.76394
0.60	1.20492	1.49524	2.96	+0.49916	4.85427
0.64	1.33828	1.50962	3.12	1.32285	4.79906
			3.28	2.13717	4.59594
0.72	1.60886	1.50437	3.44	2.91479	4.24754
0.80	1.87928	1.45494	3.60	3.62912	3.76165
0.88	2.14366	1.36324	3.76	4.25530	3.15090
0.96	-2.39667	-1.23172	3.92	+4.77108	+2.43245

t	ξ	η	t	ξ	η
4.08	+5.15772	+1.62752	5.20	+3.66716	-4.20051
4.24	5.40068	+0.76052	5.36	2.92441	4.74362
4.40	5.49029	-0.14163	5.52	2.10072	5.15091
4.56	5.42209	1.05068	5.68	1.22150	5.41055
4.72	5.19698	1.93804	5.84	+0.31375	5.51548
4.88	4.82120	2.77582	6.00	-0.59476	5.46354
5.04	+4.30600	-3.53783	6.16	-1.47640	-5.25755

Bahn 7.

Periodisch.

$$\xi_0 = +0.4, \quad K = 0.7386.$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0000	+0.40000	0.00000	0.275	+0.31054	-1.05113
0.0125	0.40007	-0.05369	0.300	0.28359	1.13120
0.0250	0.40025	0.10723	0.325	0.25296	1.20880
0.0375	0.40050	0.16047	0.350	0.21872	1.28396
0.0500	0.40074	0.21326	0.375	0.18100	1.35654
0.0625	0.40088	0.26556	0.400	0.13982	1.42656
0.0750	0.40080	0.31724	0.425	0.09529	1.49397
0.0875	0.40042	0.36828	0.450	+0.04752	1.55872
0.1000	0.39961	0.41862	0.475	-0.00342	1.62075
0.1125	0.39829	0.46825	0.500	0.05736	1.68000
0.1250	0.39638	0.51716	0.525	0.11423	1.73639
0.1375	0.39381	0.56536	0.550	0.17391	1.78988
0.1500	0.39052	0.61285	0.575	0.23626	1.84040
0.1625	0.38645	0.65964	0.600	0.30116	1.88788
0.1750	0.38157	0.70574			
0.1875	0.37584	0.75117	0.65	0.43814	1.97348
0.2000	0.36924	0.79594	0.70	0.58380	2.04624
			0.75	0.73708	2.10573
0.225	0.35334	0.88353	0.80	0.89690	2.15157
0.250	+0.33378	-0.96858	0.85	-1.06214	-2.18346

t	ξ	η	t	ξ	η
0.90	-1.23171	-2.20115	2.7	-2.86363	+3.59108
0.95	1.40447	2.20448	2.8	2.50483	3.92590
1.00	1.57929	2.19330	2.9	2.10621	4.22093
1.05	1.75506	2.16764	3.0	1.67256	4.47150
1.10	1.93068	2.12756	3.1	1.20920	4.67388
1.15	2.10503	2.07310	3.2	0.72184	4.82462
1.20	2.27703	2.00452	3.3	-0.21651	4.92104
1.25	2.44564	1.92205	3.4	+0.30048	4.96119
1.30	2.60986	1.82604	3.5	0.82260	4.94384
1.35	2.76866	1.71693	3.6	1.34323	4.86851
1.40	2.92111	1.59508	3.7	1.85574	4.73549
			3.8	2.35353	4.54582
1.5	3.20346	1.31562	3.9	2.83012	4.30132
1.6	3.45031	0.99252	4.0	3.27930	4.00453
1.7	3.65593	0.63142	4.1	3.69516	3.65872
1.8	3.81557	-0.23850	4.2	4.07216	3.26784
1.9	3.92540	+0.17958	4.3	4.40524	2.83650
2.0	3.98260	0.61585	4.4	4.68996	2.36983
2.1	3.98533	1.06326	4.5	4.92242	1.87354
2.2	3.93259	1.51467	4.6	5.09947	1.35376
2.3	3.82434	1.96300	4.7	5.21870	0.81695
2.4	3.66138	2.40134	4.8	5.27839	+0.26984
2.5	3.44527	2.82300	4.9	+5.27782	-0.28067
2.6	-3.17836	+3.22158			

Bahn 8.

$$\xi_0 = +0.4, \quad K = 0.8.$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0000	+0.40000	0.00000	0.0500	+0.40076	-0.21292
0.0125	0.40007	-0.05360	0.0625	0.40091	0.26514
0.0250	0.40026	0.10706	0.0750	0.40085	0.31674
0.0375	+0.40051	-0.16021	0.0875	+0.40048	-0.36770

t	ξ	η	t	ξ	η
0.1000	+0.39970	-0.41796	1.05	-1.74699	-2.16392
0.1125	0.39840	0.46751	1.10	1.92199	2.12394
0.1250	0.39652	0.51634	1.15	2.09572	2.06967
0.1375	0.39398	0.56446	1.20	2.26717	2.00129
0.1500	0.39072	0.61187	1.25	2.43509	1.91907
0.1625	0.38669	0.65858	1.30	2.59866	1.82335
0.1750	0.38185	0.70461	1.35	2.75682	1.71454
0.1875	0.37617	0.74996	1.40	2.90863	1.59310
0.2000	0.36961	0.79465			
			1.5	3.18969	1.31452
0.225	0.35382	0.88208	1.6	3.43523	0.99252
0.250	0.33438	0.96698	1.7	3.63959	0.63272
0.275	0.31126	1.04937	1.8	3.79800	-0.24134
0.300	0.28445	1.12929	1.9	3.90669	+0.17495
0.325	0.25400	1.20674	2.0	3.96288	0.60917
0.350	0.21994	1.28174	2.1	3.96474	1.05428
0.375	0.18238	1.35418	2.2	3.91136	1.50311
0.400	0.14138	1.42406	2.3	3.80273	1.94862
0.425	0.09703	1.49134	2.4	3.63970	2.38392
0.450	+0.04944	1.55596	2.5	3.42388	2.80234
0.475	-0.00129	1.61787	2.6	3.15766	3.19752
0.500	0.05504	1.67700	2.7	2.84409	3.56352
0.525	0.11170	1.73328	2.8	2.48691	3.89479
0.550	0.17116	1.78666	2.9	2.09040	4.18628
0.575	0.23329	1.83708	3.0	1.65941	4.43342
0.600	0.29797	1.88446	3.1	1.19923	4.63248
			3.2	0.71558	4.78012
0.65	0.43448	1.96991	3.3	-0.21448	4.87374
0.70	0.57964	2.04253	3.4	+0.29777	4.91144
0.75	0.73240	2.10191	3.5	0.81467	4.89209
0.80	0.89169	2.14768	3.6	1.32965	4.81526
0.85	1.05639	2.17953	3.7	1.83611	4.68132
0.90	1.22539	2.19721	3.8	2.32750	4.49136
0.95	1.39757	2.20056	3.9	2.79743	4.24726
1.00	-1.57181	-2.18948	4.0	+3.23973	+3.95162

t	ξ	η	t	ξ	η
4.1	+3.64856	+3.60775	4.6	+5.01875	+1.32550
4.2	4.01848	3.21965	4.7	5.13200	0.79595
4.3	4.34453	2.79193	4.8	5.18632	+0.25702
4.4	4.62232	2.32979	4.9	+5.18099	-0.28442
4.5	+4.84808	+1.83893			

Bahn 9.

$$\xi_0 = +0.4, \quad K = 1.0.$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0000	+0.40000	0.00000	0.300	+0.28725	-1.12308
0.0125	0.40007	-0.05331	0.325	0.25737	1.20004
0.0250	0.40027	0.10647	0.350	0.22392	1.27452
0.0375	0.40054	0.15936	0.375	0.18689	1.34649
0.0500	0.40082	0.21182	0.400	0.14645	1.41593
0.0625	0.40101	0.26377	0.425	0.10269	1.48277
0.0750	0.40100	0.31512	0.450	0.05571	1.54697
0.0875	0.40068	0.36581	0.475	+0.00565	1.60847
0.1000	0.39997	0.41581	0.500	-0.04747	1.66721
0.1125	0.39876	0.46510	0.525	0.10346	1.72313
0.1250	0.39697	0.51368	0.550	0.16220	1.77616
0.1375	0.39453	0.56154	0.575	0.22362	1.82626
0.1500	0.39139	0.60870	0.600	0.28756	1.87334
0.1625	0.38748	0.65515			
0.1750	0.38277	0.70092	0.65	0.42252	1.95824
0.1875	0.37724	0.74602	0.70	0.56608	2.03042
0.2000	0.37084	0.79045	0.75	0.71717	2.08946
0.2125	0.36356	0.83424	0.80	0.87472	2.13499
0.2250	0.35538	0.87737	0.85	1.03764	2.16671
			0.90	1.20480	2.18437
0.250	0.33632	0.96176	0.95	1.37511	2.18782
0.275	+0.31361	-1.04365	1.00	-1.54743	-2.17694

t	ξ	η	t	ξ	η
1.05	-1.72066	-2.15180	2.8	-2.42849	+3.79340
1.10	1.89368	2.11217	2.9	2.03890	4.07336
1.15	2.06541	2.05849	3.0	1.61654	4.30930
1.20	2.23476	1.99076	3.1	1.16673	4.49756
1.25	2.40068	1.90936	3.2	0.69517	4.63510
1.30	2.56217	1.81458	3.3	-0.20788	4.71956
1.35	2.71824	1.70685	3.4	+0.28892	4.74930
1.40	2.86795	1.58664	3.5	0.78883	4.72341
			3.6	1.28539	4.64170
1.5	3.14477	1.31096	3.7	1.77213	4.50473
1.6	3.38610	0.99249	3.8	2.24268	4.31383
1.7	3.58631	0.63694	3.9	2.69086	4.07105
1.8	3.74074	-0.25059	4.0	3.11073	3.77915
1.9	3.84572	+0.15986	4.1	3.49668	3.44161
2.0	3.89858	0.58742	4.2	3.84354	3.06254
2.1	3.89764	1.02498	4.3	4.14663	2.64666
2.2	3.84216	1.46543	4.4	4.40186	2.19928
2.3	3.73230	1.90175	4.5	4.60578	1.72613
2.4	3.56904	2.32712	4.6	4.75566	1.23338
2.5	3.35417	2.73498	4.7	4.84951	0.72753
2.6	3.09022	3.11911	4.8	4.88619	+0.21525
2.7	-2.78038	+3.47370	4.9	+4.86537	-0.29665

Bahn 10.

$$E_0 = 0, \quad K = 5.9.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	0.00000	0.00000	+ 1.00000	0.00000
0.02	0.00000	+ 0.08001	1.00321	0.00000
0.04	+ 0.00002	0.16013	1.01263	0.00000
0.06	0.00014	0.24044	1.02905	- 0.00004
0.08	+ 0.00044	+ 0.32106	+ 1.05198	- 0.00015

ψ	E	F	ξ	η
0.10	+ 0.00110	+ 0.40207	+ 1.08193	— 0.00045
0.12	0.00231	0.48358	1.11921	0.00116
0.14	0.00435	0.56570	1.16434	0.00259
0.16	0.00756	0.64853	1.21772	0.00526
0.18	0.01237	0.73217	1.28015	0.00989
0.20	0.01932	0.81674	1.35225	0.01760
0.22	0.02907	0.90235	1.43490	0.02994
0.24	0.04244	0.98914	1.52904	0.04915
0.26	0.06044	1.07723	1.63558	0.07840
0.28	0.08434	1.16677	1.75521	0.12217
0.30	0.11574	1.25793	1.88843	0.18674
0.32	0.15663	1.35092	2.03481	0.28094
0.34	0.20956	1.44596	2.19175	0.41716
0.36	0.27780	1.54332	2.35311	0.61243
0.38	0.36558	1.64328	2.50535	0.88996
0.40	0.47846	1.74610	2.62169	1.27944
0.42	+ 0.62376	+ 1.85186	+ 2.64954	— 1.81497

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	+2.64954	—1.81497	0.9	+0.80448	—4.31964
0.04	2.63749	1.93943	1.0	0.42133	4.48437
0.08	2.61870	2.06482	1.1	+0.01289	4.61105
0.12	2.59314	2.19082	1.2	—0.41671	4.69640
0.16	2.56081	2.31713	1.3	0.86293	4.73767
			1.4	1.32093	4.73254
0.24	2.47588	2.56935	1.5	1.78558	4.67929
0.32	2.36404	2.81892	1.6	2.25154	4.57672
0.40	2.22561	3.06330	1.7	2.71331	4.42427
0.48	2.06108	3.29996	1.8	3.16531	4.22197
0.56	1.87114	3.52641	1.9	3.60196	3.97051
0.64	1.65665	3.74021	2.0	4.01770	3.67119
0.72	1.41871	3.93898	2.1	4.40716	3.32596
0.80	+1.15858	—4.12046	2.2	—4.76513	—2.93737

t	ξ	η	t	ξ	η
2.3	-5.08668	-2.50858	4.3	-0.82214	+6.64035
2.4	5.36727	2.04330	4.4	-0.18357	6.72013
2.5	5.60272	1.54575	4.5	+0.46285	6.73674
2.6	5.78936	1.02063	4.6	1.11074	6.68942
2.7	5.92402	-0.47305	4.7	1.75361	6.57810
2.8	6.00410	+0.09154	4.8	2.38497	6.40334
2.9	6.02764	0.66742	4.9	2.99842	6.16640
3.0	5.99324	1.24863	5.0	3.58767	5.86917
3.1	5.90022	1.82908	5.1	4.14668	5.51420
3.2	5.74853	2.40264	5.2	4.66965	5.10465
3.3	5.53878	2.96315	5.3	5.15112	4.64430
3.4	5.27222	3.50455	5.4	5.58604	4.13747
3.5	4.95079	4.02094	5.5	5.96982	3.58897
3.6	4.57699	4.50661	5.6	6.29839	3.00412
3.7	4.15396	4.95615	5.7	6.56823	2.38861
3.8	3.68537	5.36447	5.8	6.77642	1.74850
3.9	3.17544	5.72688	5.9	6.92071	1.09012
4.0	2.62886	6.03915	6.0	6.99949	+0.42002
4.1	2.05072	6.29752	6.1	7.01184	-0.25511
4.2	-1.44655	+6.49881	6.2	+6.95758	-0.92852

Bahn 11.

$$E_0 = 0, \quad K = 6.0.$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	0.00000	0.00000	+ 1.00000	0.00000
0.02	0.00000	+ 0.08001	1.00321	0.00000
0.04	+ 0.00003	0.16013	1.01286	0.00000
0.06	0.00014	0.24043	1.02902	- 0.00004
0.08	0.00044	0.32102	1.05195	0.00015
0.10	0.00110	0.40200	1.08190	0.00045
0.12	+ 0.00231	+ 0.48346	+ 1.11915	- 0.00116

ψ	E	F	ξ	η
0.14	+ 0.00435	+ 0.56550	+ 1.16421	- 0.00259
0.16	0.00755	0.64823	1.21753	0.00525
0.18	0.01236	0.73174	1.27979	0.00987
0.20	0.01929	0.81613	1.35169	0.01755
0.22	0.02898	0.90151	1.43403	0.02981
0.24	0.04232	0.98802	1.52771	0.04894
0.26	0.06024	1.07575	1.63365	0.07800
0.28	0.08401	1.16485	1.75252	0.12140
0.30	0.11519	1.25546	1.88461	0.18530
0.31	0.13415	1.30139	1.95555	0.22753
0.32	0.15574	1.34777	2.02945	0.27836
0.33	0.18028	1.39463	2.10600	0.33938
0.34	0.20814	1.44198	2.18460	0.41253
0.35	0.23973	1.48987	2.26426	0.49997
0.36	0.27554	1.53833	2.34389	0.60429
0.37	0.31605	1.58737	2.42150	0.72833
0.38	0.36198	1.63705	2.49441	0.87564
0.39	0.41402	1.68737	2.55900	1.05002
0.40	0.47287	1.73837	2.61018	1.25526
0.41	0.53955	1.79004	2.64106	1.49572
0.42	0.61509	1.84234	2.64200	1.77521
0.43	0.70068	1.89523	2.60065	2.09657
0.44	0.79768	1.94856	2.50054	2.46076
0.445	0.85092	1.97534	2.42215	2.65806
0.450	0.90759	2.00214	2.32093	2.86437
0.455	0.96789	2.02892	2.19368	3.07827
0.460	1.03202	2.05562	2.03686	3.29764
0.465	1.10022	2.08220	1.84687	3.51955
0.470	1.17270	2.10857	1.62005	3.74022
0.475	1.24965	2.13466	1.35296	3.95487
0.480	1.33129	2.16038	1.04255	4.15744
0.485	1.41780	2.18564	0.68647	4.34069
0.490	+ 1.50934	+ 2.21036	+ 0.28341	- 4.49614

ψ	E	F	ξ	η
0.495	+ 1.60608	+ 2.23442	— 0.16663	— 4.61411
0.500	1.70810	2.25777	0.66153	4.68400
0.505	1.81551	2.28032	1.19711	4.69450
0.510	1.92836	2.30203	1.76644	4.63433
0.515	2.04662	2.32286	2.35972	4.49200
0.520	2.17033	2.34284	2.96429	4.25791
0.525	2.29945	2.36200	3.56433	3.92355
0.530	2.43397	2.38044	4.14240	3.48323
0.535	2.57382	2.39828	4.67711	2.93433
0.540	2.71902	2.41565	5.14688	2.27763
0.545	2.86961	2.43267	5.52750	1.51862
0.550	3.02564	2.44948	5.79519	— 0.66501
0.555	+ 3.18722	+ 2.46617	— 5.92493	+ 0.26663

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	—5.92493	+0.26663	1.7	+0.62588	+6.56127
0.1	5.92748	0.83442	1.8	1.25438	6.49368
0.2	5.87291	1.40500	1.9	1.87537	6.36417
0.3	5.76084	1.97237	2.0	2.48261	6.17362
0.4	5.59156	2.53050	2.1	3.06995	5.92354
0.5	5.36584	3.07343	2.2	3.63139	5.61608
0.6	5.08533	3.59526	2.3	4.16120	5.25398
0.7	4.75215	4.09032	2.4	4.65391	4.84061
0.8	4.36904	4.55315	2.5	5.10445	4.37987
0.9	3.93931	4.97862	2.6	5.50813	3.87617
1.0	3.46680	5.36194	2.7	5.86077	3.33440
1.1	2.95584	5.69875	2.8	6.15868	2.75990
1.2	2.41120	5.98513	2.9	6.39876	2.15832
1.3	1.83804	6.21769	3.0	6.57851	1.53567
1.4	1.24186	6.39357	3.1	6.69607	0.89816
1.5	0.62845	6.51047	3.2	6.75022	+0.25217
1.6	—0.00381	+6.56673	3.3	+6.74046	—0.39581

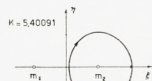


Fig. a.

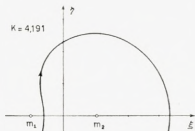


Fig. b.

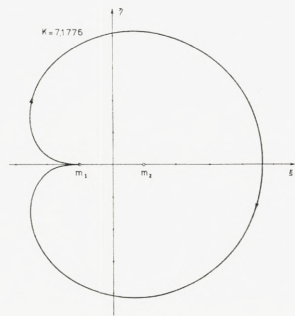


Fig. c.

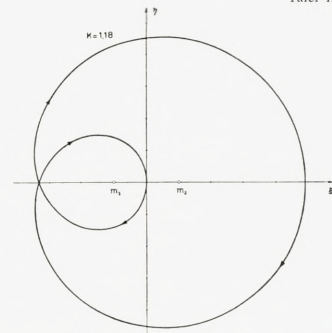


Fig. d.

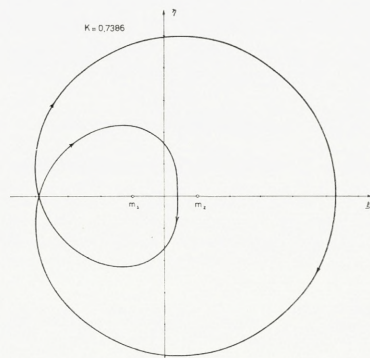


Fig. e.

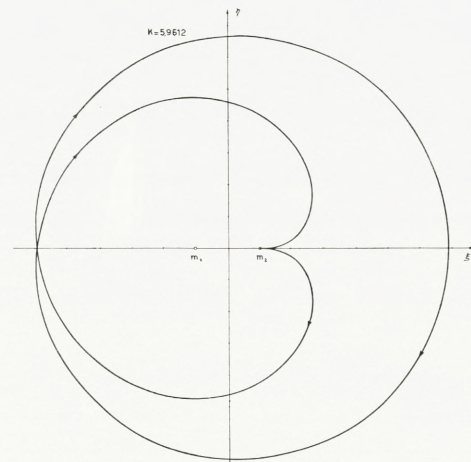


Fig. f.



Fig. g.

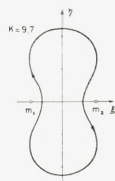


Fig. h.

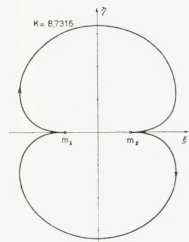


Fig. i.

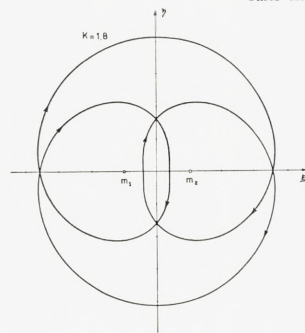


Fig. j.

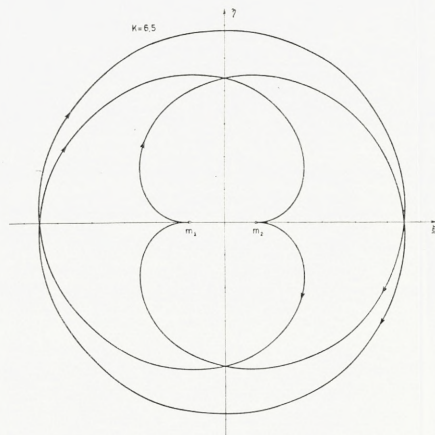


Fig. k.

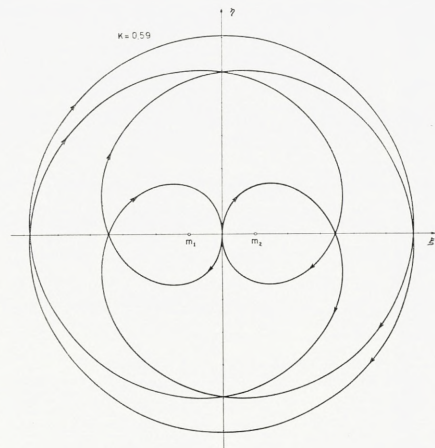


Fig. l.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 6.

ÜBER FASTPERIODISCHE BEWE-
GUNGEN IN EBENEN BEREICHEN
UND AUF FLÄCHEN

VON

W. FENCHEL UND B. JESSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1. Einleitung.

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist ein Satz von H. BOHR¹ über fastperiodische Bewegungen auf einem Kreis. Es handelt sich dabei um eine Übertragung der folgenden einfachen Eigenschaft von periodischen Bewegungen auf fastperiodische.

Es sei $z = f(t)$ eine stetige Funktion der Periode p mit $|f(t)| = 1$. Wir schreiben $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, wobei das Argument $\varphi(t) = \arg f(t)$ stetig gewählt und etwa durch die Festsetzung $-\pi \leq \varphi(0) < \pi$ normiert sei. Aus der Periodizität von $f(t)$ folgt, dass die Differenz $\varphi(t+p) - \varphi(t)$ für jedes t ein ganzes Vielfaches von 2π ist, das aus Stetigkeitsgründen von t unabhängig ist; bezeichnen wir es mit $n \cdot 2\pi$, so ist offenbar die Funktion $\psi(t) = \varphi(t) - \frac{n \cdot 2\pi}{p}t$ eine periodische Funktion der Periode p . Es gilt also für $\varphi(t)$ die Darstellung

$$\varphi(t) = \frac{n \cdot 2\pi}{p}t + \psi(t).$$

Die Konstante $\frac{n \cdot 2\pi}{p}$ nennen wir die Säkularkonstante von $f(t)$.

Eine stetige Funktion $z = f(t)$ heisst bekanntlich fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine »relativ dichte« Menge von Verschiebungszahlen gibt, d. h. Zahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$, sodass für alle t

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon$$

¹ BOHR [1], [2]; vgl. auch WINTNER [1], [2].

ist. Hierbei wird eine Zahlenmenge relativ dicht genannt, wenn es eine Zahl $l > 0$ derart gibt, dass jedes Intervall der Länge l wenigstens eine Zahl der Menge enthält.

Der BOHRsche Satz besagt nun, dass auch bei einer fastperiodischen Funktion $z = f(t)$ mit $|f(t)| = 1$ ein dem obigen ähnlicher Sachverhalt besteht. Wir schreiben $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, wobei $\varphi(t) = \arg f(t)$ wie oben festgelegt ist. Dann gilt

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

wo c eine Konstante, die Säkularkonstante der Funktion, und $\psi(t)$ fastperiodisch ist. Aus der Beschränktheit von $\psi(t)$ ergibt sich für c die Darstellung

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Der einfache Beweis dieses Satzes beruht auf der folgenden Bemerkung: Es sei $\tau = \tau(\varepsilon)$ eine zu einem positiven $\varepsilon < 2$ gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, also

$$|f(t+\tau) - f(t)| = |e^{i\varphi(t+\tau)} - e^{i\varphi(t)}| \leq \varepsilon < 2$$

für alle t . Dann ist für jedes t die Differenz $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ bis auf einen Fehler von höchstens $2 \arcsin \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \frac{\pi}{2}$ ein ganzes Vielfaches von 2π , das wegen $\varepsilon \frac{\pi}{2} < \pi$ von t unabhängig sein muss. Bezeichnen wir es mit $n_t \cdot 2\pi$, so gilt also für alle t

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - n_t \cdot 2\pi| \leq \varepsilon \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus lässt sich ohne Mühe die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t}$ und dann mit dem so bestimmten c die Fastperiodizität von $\psi(t) = \varphi(t) - ct$ einsehen.

In der folgenden Untersuchung werden wir den Satz in etwas anderer Formulierung verwenden: Es sei $\varphi(t)$ ($-\infty < t < \infty$) eine reelle stetige Funktion und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Wir wollen die Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(t)$ modulo λ nennen, falls es zu jedem t eine ganze Zahl $n_{\tau t}$ derart gibt, dass die Ungleichung

$$|\varphi(t + \tau) - \varphi(t) - n_{\tau t}\lambda| \leq \varepsilon$$

besteht. (Diese Zahl $n_{\tau t}$ ist dann für $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ eindeutig bestimmt und überdies von t unabhängig). Wir nennen $\varphi(t)$ fastperiodisch modulo λ , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen modulo λ gibt.

Da die Fastperiodizität modulo λ der Funktion $\varphi(t)$ mit der gewöhnlichen Fastperiodizität der Funktion $f(t) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\varphi(t)}$ gleichbedeutend ist, ergibt sich der BOHRsche Satz in der folgenden Form: Jede modulo λ fastperiodische Funktion ist von der Form

$$\varphi(t) = ct + \psi(t),$$

wo c konstant und $\psi(t)$ fastperiodisch ist.

Wir betrachten nun eine fastperiodische Funktion $z = f(t)$, von der wir annehmen, dass sie gewissen Punkten a_1, a_2, \dots, a_m nicht beliebig nahe kommt, d. h. es sollen für alle t und $\mu = 1, 2, \dots, m$ die Ungleichungen

$$|f(t) - a_\mu| \geq k > 0$$

bestehen. Schreibt man für jedes $\mu = 1, 2, \dots, m$

$$f(t) - a_\mu = |f(t) - a_\mu| e^{i\varphi_\mu(t)},$$

so ist jeder der beiden Faktoren auf der rechten Seite fastperiodisch, insbesondere also nach dem BOHRschen Satz

$$q_\mu(t) = c_\mu t + \psi_\mu(t).$$

BOHR hat die Frage gestellt, welche Systeme von Säkular-konstanten c_1, c_2, \dots, c_m hier auftreten können. Für periodische Bewegungen lässt sich leicht einsehen, dass alle und nur die Wertsysteme c_1, c_2, \dots, c_m vorkommen, bei denen die Verhältnisse zwischen je zwei c_μ rational sind. Der eine von uns¹ hat nun kürzlich bewiesen, dass dies auch allgemein für fastperiodische Bewegungen gilt, m. a. W. dass die Menge der bei fastperiodischen Bewegungen auftretenden Systeme von Säkular-konstanten c_1, c_2, \dots, c_m nicht umfassender ist als die Menge der schon bei periodischen Bewegungen auftretenden.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass dem ein allgemeinerer Tatbestand zugrunde liegt.

Es sei G ein, etwa von endlich vielen Kreisen begrenztes, ebenes Gebiet. Zwei stetige Bewegungen $z = f(t)$ und $z = g(t)$ ($-\infty < t < \infty$) in G werden homotop genannt, wenn es möglich ist, sie gleichmässig stetig in G in einander überzuführen, d. h. wenn es eine Schar $z = h_\theta(t)$, $0 \leq \theta \leq 1$, von stetigen Bewegungen in G gibt, derart dass

$$h_0(t) = f(t), \quad h_1(t) = g(t)$$

$$|h_{\theta_1}(t) - h_{\theta_2}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\theta_1 - \theta_2| \leq \delta = \delta(\varepsilon).$$

Es gilt dann: Jede fastperiodische Bewegung $z = f(t)$ in G ist einer periodischen Bewegung $z = g(t)$ in G homotop.

Hierin ist, wie unmittelbar zu sehen, der erwähnte Satz über die Säkular-konstanten enthalten. Wählt man nämlich

¹ JESSEN [1].

für G das von den Kreisen $|z - a_\mu| = k$ und einem genügend grossen Kreis $|z| = K$ begrenzte Gebiet, so ist klar, dass zwei in G homotope fastperiodische Bewegungen $z = f(t)$ und $z = g(t)$ dieselben Säkular konstanten c_1, c_2, \dots, c_m besitzen, da für jedes μ die Differenz der Argumente $\arg(f(t) - a_\mu)$ und $\arg(g(t) - a_\mu)$ für alle t beschränkt ist.

Es erwies sich zunächst, dass der Beweis für den Satz über die Säkular konstanten zu einem Beweis des zuletzt genannten Satzes ausgebaut werden konnte. Hierbei wurde aber der tief liegende Approximationssatz für fastperiodische Funktionen herangezogen. Bei dem im folgenden dargestellten Beweis gelang es auf Grund einer Anregung von J. NIELSEN mit den elementarsten Eigenschaften der fastperiodischen Funktionen auszukommen.

Wir gehen zur universellen Überlagerungsfläche Φ des Gebietes G über und führen in dieser in bekannter Weise eine nichteuklidische Metrik ein. Der fastperiodischen Bewegung in G entspricht dann eine »modulo einer Gruppe (der Fundamentalgruppe von G) fastperiodische« Bewegung in Φ . Von dieser wird dann in sehr einfacher Weise gezeigt, dass sie in beschränkter nichteuklidischer Entfernung von einer gleichförmigen Bewegung auf einer nichteuklidischen Geraden in Φ verläuft, und zwar einer Geraden, der eine geschlossene Kurve in G entspricht. Indem man wieder zum Gebiet G übergeht, erhält man mühelos die Behauptung.

Diese Schlussweise lässt sich nun nicht nur für ebene Gebiete, sondern wörtlich ebenso für eine umfassende Klasse von offenen und geschlossenen Flächen durchführen, und zwar für alle diejenigen Flächen, auf denen sich eine (in einem später zu präzisierenden Sinne) reguläre Metrik konstanter negativer Krümmung einführen lässt. Dazu gehören

neben den ebenen Gebieten endlichen Zusammenhangs u. a. sämtliche geschlossenen Flächen mit folgenden Ausnahmen: Kugel, projektive Ebene, zweiseitige und einseitige Ringfläche.

Nimmt man diese vier Flächentypen aus, so gilt also folgender Satz: Jede fastperiodische Bewegung auf einer geschlossenen Fläche ist einer periodischen Bewegung homotop, d. h. sie lässt sich auf der Fläche gleichmässig stetig in eine periodische Bewegung deformieren. Dass die Ausnahmen nicht durch die Beweismethode bedingt sind, zeigt das Beispiel der Ringfläche, auf der es fastperiodische Bewegungen gibt, die keiner periodischen Bewegung homotop sind.

§ 2. Vorbemerkungen über diskontinuierliche Bewegungsgruppen in der hyperbolischen Ebene.

Es sei E der Einheitskreis der Ebene und Φ sein Inneres. Wir fassen Φ in der üblichen Weise als nichteuklidische Ebene auf, indem wir darin die Poincarésche Massbestimmung einführen. Den nichteuklidischen Abstand zweier Punkte bezeichnen wir mit $\varrho[P, Q]$. Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\varrho[P, Q] + \varrho[Q, R] \geq \varrho[P, R].$$

Die geraden Linien dieser Metrik sind die zu E orthogonalen Kreisbögen. Die auf E gelegenen Endpunkte eines solchen Orthogonalkreisbogens sind als die unendlich fernen Punkte der betreffenden Geraden anzusehen. Es seien a eine nichteuklidische Gerade, U und V ihre unendlich fernen Punkte. Dann ist jeder U und V verbindende, in Φ gelegene Kreisbogen eine Abstandslinie von a , d. h. seine

Punkte haben konstante nichteuklidische Entfernung von a . Die auf a senkrechten (nichteuklidischen) Geraden stehen auch senkrecht auf den Abstandslinien von a und sind die kürzesten Verbindungen zwischen je zwei dieser Abstandslinien. Die kürzeste Verbindung zwischen je zwei Senkrechten zu a liegt auf a . Wir erwähnen noch: Sind α und β die Katheten und γ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\text{Cos } \gamma = \text{Cos } \alpha \cdot \text{Cos } \beta.$$

Unter einer nichteuklidischen Bewegung verstehen wir wie üblich eine eindeutige stetige Abbildung von Φ auf sich, die die Abstände ungeändert lässt. Die nichteuklidischen Bewegungen zerfallen bekanntlich in folgende Typen:

I. Bewegungen mit Erhaltung des Umlaufssinnes.

1) Drehungen. Es gibt genau einen Fixpunkt in Φ , und kein unendlich ferner Punkt bleibt fest.

2) Grenzdrehungen. Es gibt genau einen unendlich fernen Fixpunkt und keinen Fixpunkt in Φ .

3) Eigentliche Schiebungen. Es gibt genau zwei unendlich ferne Fixpunkte und keinen in Φ . Die die unendlich fernen Fixpunkte verbindende Gerade, die Achse der Schiebung, sowie jede ihrer Abstandslinien geht in sich über.

II. Bewegungen mit Wechsel des Umlaufssinnes.

1) Spiegelungen. Eine Gerade bleibt punktweise fest.

2) Klappschiebungen. Es gibt genau zwei unendlich ferne Fixpunkte, deren Verbindungsgerade a , die Achse, in sich übergeht. Eine Klappschiebung setzt sich aus einer eigentlichen Schiebung mit der Achse a und einer Spiegelung an a zusammen.

Im folgenden spielen nur diejenigen Bewegungen eine Rolle, bei denen der nichteuklidische Abstand eines Punktes von seinem Bildpunkt für alle Punkte von \mathcal{D} eine positive untere Grenze besitzt. Es ist klar, dass Drehungen und Spiegelungen diese Eigenschaft nicht zukommt, da bei ihnen wenigstens ein Punkt von \mathcal{D} festbleibt. Aber auch die Grenzdrehungen sind ausgeschlossen, da es bei ihnen Punkte gibt, deren Entfernung vom Bildpunkt beliebig klein ist. Es bleiben also nur die eigentlichen Schiebungen und Klappschiebungen, die wir der Kürze wegen im allgemeinen gemeinsam als Schiebungen bezeichnen. Bei einer Schiebung erreicht der Abstand von Punkt zu Bildpunkt sein Minimum $\lambda > 0$ für die Punkte der Achse. Wir bezeichnen λ als Verschiebungslänge.

Zwei Schiebungen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn sie dieselbe Achse, also dieselben unendlich fernen Fixpunkte haben.

Dass zwei Schiebungen γ_1 und γ_2 derselben Achse a vertauschbar sind, liegt auf der Hand. Versehen wir nämlich a mit einem Durchlaufungssinn und zählen die Verschiebungslängen λ_1 und λ_2 von γ_1 und γ_2 positiv oder negativ, je nachdem die Schiebung längs a in diesem oder dem entgegengesetzten Sinn erfolgt, so ist sowohl $\gamma_1\gamma_2$ als auch $\gamma_2\gamma_1$ eine Schiebung längs a mit der Verschiebungslänge $\lambda_1 + \lambda_2$, und zwar eine eigentliche Schiebung, wenn γ_1 und γ_2 beide eigentliche oder beide Klappschiebungen sind, sonst eine Klappschiebung.

Es seien nun umgekehrt γ_1 und γ_2 vertauschbar, also

$$(2, 1) \quad \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1.$$

Ferner sei a die Achse von γ_1 und a' die aus ihr bei γ_2 hervorgehende Gerade. Dann ist nach (2, 1) wegen $\gamma_2 a = a'$

$$\gamma_1 a' = a';$$

d. h. nicht nur a sondern auch a' wird bei γ_1 in sich übergeführt. Nun kann aber bei einer Schiebung ausser der Achse a keine Gerade a' in sich übergehen; sonst wären nämlich entweder die unendlich fernen Punkte von a' Fixpunkte, was ausgeschlossen ist, oder a' würde mit Umkehrung des Durchlaufungssinnes auf sich abgebildet, und dann gäbe es auf a' , also in \mathcal{D} einen Fixpunkt. a' muss daher mit a identisch sein. Also ist $\gamma_2 a = a$; d. h. a ist auch Achse von γ_2 .

Es sei nun T eine Gruppe von nichteuklidischen Bewegungen mit der Eigenschaft, dass der Abstand zweier äquivalenter Punkte stets grösser oder gleich einer positiven Konstante k ist. Hierbei werden zwei Punkte äquivalent genannt, wenn es eine zu T gehörige Bewegung gibt, die den einen in den anderen überführt. Eine solche Gruppe werde als stark diskontinuierlich¹ bezeichnet. Nach dem obigen ist klar, dass eine stark diskontinuierliche Gruppe abgesehen von der Identität, nur Schiebungen, und zwar nur solche mit Verschiebungslängen $\geq k$ enthalten kann.

Ferner folgt: Ist Z eine (nicht nur aus der Identität bestehende) kommutative Untergruppe der stark diskontinuierlichen Gruppe T , so haben alle Elemente von Z die gleiche Achse, und Z ist eine unendliche zyklische Gruppe.

Die erste auf die Achse bezügliche Behauptung ergibt sich unmittelbar aus einer oben gemachten Bemerkung. Dass Z zyklisch ist, sieht man so: Die gemeinsame Achse a möge orientiert und die Verschiebungslängen der Ele-

¹ Es wird hier mehr verlangt als bei eigentlich diskontinuierlichen Gruppen; vgl. § 5.

mente von Z entsprechend mit Vorzeichen versehen werden. Wegen der Diskontinuitätseigenschaft von T können zwei verschiedene Elemente von Z nicht dieselbe Verschiebungslänge haben, und es gibt unter den Elementen von Z genau eins, ζ_0 , mit minimaler positiver Verschiebungslänge λ_0 . Ist nun $\lambda = n\lambda_0 + r$ (n ganz, $0 \leq r < \lambda_0$) die Verschiebungslänge eines beliebigen anderen Elementes ζ von Z , so hat $\zeta \cdot \zeta_0^{-n}$ die nicht negative Verschiebungslänge $r < \lambda_0$. Folglich ist $r = 0$ und $\zeta \cdot \zeta_0^{-n}$ die Identität. Jedes Element von Z ist also ganzzahlige Potens von ζ_0 .

§ 3. Fastperiodische Bewegungen modulo einer diskontinuierlichen Bewegungsgruppe.

$F(t)$ sei ein für $-\infty < t < \infty$ stetig von t abhängiger Punkt der nichteuklidischen Ebene Φ . Wir sprechen dann von einer Bewegung $F(t)$ in Φ . Unter einer zu ε gehörigen Verschiebungszahl von $F(t)$ wird man hier eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ verstehen, derart dass für alle t der nichteuklidische Abstand

$$\varrho[F(t+\tau), F(t)] \leq \varepsilon$$

ist. $F(t)$ soll fastperiodisch heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von zu ε gehörigen Verschiebungszahlen gibt. Wir nehmen nun eine für das folgende grundlegende Erweiterung dieser Begriffsbildung vor.

Es sei eine stark diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ in der nichteuklidischen Ebene Φ gegeben. Eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ soll dann eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Bewegung $F(t)$ modulo Γ genannt werden, wenn es ein (von τ und eventuell von t abhängiges) Element $\gamma_{t\tau}$ aus Γ gibt, so dass für alle t

$$\varrho[F(t+\tau), \gamma_{t\tau}F(t)] \leq \varepsilon$$

ist, wo $\gamma_{\tau t}F$ den aus F bei der Bewegung $\gamma_{\tau t}$ hervorgehenden Punkt bedeutet. Die Bewegung $F(t)$ heiße fastperiodisch modulo Γ , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ von $F(t)$ modulo Γ gibt.

Bevor wir zur näheren Untersuchung dieser Bewegungen übergehen, bemerken wir, dass für $\varepsilon < \frac{k}{2}$, wo k die in der Definition der Gruppe Γ vorkommende Konstante ist, das Gruppenelement $\gamma_{\tau t}$ durch ε , τ und t eindeutig bestimmt und überdies von t unabhängig ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so gäbe es ein t_0 und eine Folge $t_\nu \rightarrow t_0$ ($\nu = 1, 2, \dots$), sowie entsprechende Gruppenelemente $\gamma_{\tau t_\nu}$, $\gamma_{\tau t_0}$, sodass

$$\gamma_{\tau t_\nu} \neq \gamma_{\tau t_0}$$

für $\nu = 1, 2, \dots$, also nach Definition von k

$$(3, 1) \quad \varrho[\gamma_{\tau t_\nu}F(t), \gamma_{\tau t_0}F(t)] \geq k$$

für alle t und $\nu = 1, 2, \dots$. Andererseits ist

$$(3, 2) \quad \varrho[F(t_0 + \tau), \gamma_{\tau t_0}F(t_0)] \leq \varepsilon < \frac{k}{2},$$

$$(3, 3) \quad \varrho[F(t_\nu + \tau), \gamma_{\tau t_\nu}F(t_\nu)] \leq \varepsilon < \frac{k}{2}.$$

Aus (3, 1) und (3, 3) ergäbe sich aber nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho[F(t_\nu + \tau), \gamma_{\tau t_0}F(t_\nu)] \geq k - \varepsilon > \frac{k}{2}$$

und daraus für $\nu \rightarrow \infty$ wegen der Stetigkeit von F ein Widerspruch gegen (3, 2). Wir können also γ_τ statt $\gamma_{\tau t}$ schreiben und haben für $\varepsilon < \frac{k}{2}$ als Definitionsungleichung

einer zu ε gehörigen Verschiebungszahl τ modulo Γ

$$(3, 4) \quad \varrho[F(t + \tau), \gamma_\tau F(t)] \leq \varepsilon.$$

Unser nächstes Ziel ist der folgende Satz, aus dem sich mit Hilfe des in der Einleitung genannten Satzes von BOHR mühelos alle aufgestellten Behauptungen ergeben werden:

Eine modulo Γ fastperiodische Bewegung $F(t)$ ist stets fastperiodisch modulo einer zyklischen Untergruppe Z von Γ .

Der Beweis hierfür kann sehr einfach folgendermassen geführt werden: Wir nehmen $\varepsilon < \frac{k}{4}$ an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, und betrachten zwei zu ε gehörige Verschiebungszahlen τ_1 und τ_2 modulo Γ . Wir haben also für alle t

$$(3, 5) \quad \varrho[F(t + \tau_1), \gamma_{\tau_1} F(t)] \leq \varepsilon < \frac{k}{4}$$

$$(3, 6) \quad \varrho[F(t + \tau_2), \gamma_{\tau_2} F(t)] \leq \varepsilon < \frac{k}{4}.$$

Aus (3, 5) folgt wegen der Bewegungsinvarianz des Abstandes

$$\varrho[\gamma_{\tau_2} F(t + \tau_1), \gamma_{\tau_2} \gamma_{\tau_1} F(t)] \leq \varepsilon < \frac{k}{4}$$

und aus (3, 6), wenn $t + \tau_1$ statt t geschrieben wird,

$$\varrho[F(t + \tau_1 + \tau_2), \gamma_{\tau_2} F(t + \tau_1)] \leq \varepsilon < \frac{k}{4},$$

also nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho[F(t + \tau_1 + \tau_2), \gamma_{\tau_2} \gamma_{\tau_1} F(t)] \leq 2\varepsilon < \frac{k}{2}.$$

Dies besagt, dass $\tau_1 + \tau_2$ eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl modulo Γ und $\gamma_{\tau_2} \gamma_{\tau_1}$ das entsprechende Gruppenele-

ment ist. Indem man die Rollen von τ_1 und τ_2 vertauscht, schliesst man ebenso, dass $\tau_2 + \tau_1 = \tau_1 + \tau_2$ eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl modulo Γ ist, und zwar mit dem Gruppenelement $\gamma_{\tau_1}\gamma_{\tau_2}$. Nun ist wegen $2\varepsilon < \frac{k}{2}$, wie oben bemerkt, das zu $\tau_1 + \tau_2$ gehörige Gruppenelement eindeutig bestimmt. Folglich ist

$$\gamma_{\tau_2}\gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_1}\gamma_{\tau_2}.$$

Das heisst: Die den zu $\varepsilon < \frac{k}{4}$ gehörigen Verschiebungszahlen entsprechenden Gruppenelemente sind paarweise vertauschbar. Sie erzeugen also eine kommutative Untergruppe Z von Γ , und diese ist nach dem letzten Satz des vorigen Paragraphen zyklisch.

Es kann der Fall eintreten, dass die Gruppe Z nur aus der Identität besteht. Dann ist $F(t)$ fastperiodisch im gewöhnlichen Sinne, die Bewegung $F(t)$ verläuft ganz in einem beschränkten Teil der nichteuklidischen Ebene, und es ist möglich, $F(t)$ gleichmässig stetig in einen Punkt zu deformieren. Dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen werden.

Z sei also eine unendliche zyklische Gruppe von Schiebungen. Es ist mühelos einzusehen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass Z nur eigentliche Schiebungen und keine Klappschiebungen enthält. Sonst betrachte man nämlich bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahlen τ und Gruppenelemente γ_τ . Offenbar sind 2τ und γ_τ^2 Verschiebungszahlen und Gruppenelemente zu ε , und mit den τ bilden auch die 2τ eine relativ dichte Menge. Z kann also durch die aus den Quadraten der Elemente von Z gebildete Gruppe ersetzt werden, und diese enthält keine Klappschiebungen.

Wir gehen nun dazu über, Folgerungen für den Verlauf

einer modulo T fastperiodischen Bewegung $F(t)$ zu ziehen. Zu diesem Zweck führen wir in der nichteuklidischen Ebene \mathcal{O} in folgender Weise ein Koordinatensystem ein: a sei die gemeinsame Achse der Elemente von Z . Auf a werde ein Punkt O und eine Orientierung gewählt und als Abszisse x eines Punktes P von a der in gewöhnlicher Weise mit Vorzeichen versehene nichteuklidische Abstand $\varrho[O, P]$ eingeführt. a zerlegt \mathcal{O} in zwei Halbebenen, von denen die eine als positiv, die andere als negativ bezeichnet sei. Unter der Ordinate y eines Punktes P von \mathcal{O} soll dann der senkrechte Abstand von P und a verstanden werden, und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem P in der positiven oder negativen Halbebene liegt. Die Abszisse x von P ist die Abszisse seiner senkrechten Projektion auf a .

Ist nun $F(t)$ eine fastperiodische Bewegung modulo Z und λ die kleinste positive Verschiebungslänge, die in Z vorkommt, so folgen aus (3, 4) für die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ von $F(t)$ die Ungleichungen

$$(3, 7) \quad |x(t+\tau) - x(t) - n_\tau \lambda| \leq \varepsilon,$$

$$(3, 8) \quad |y(t+\tau) - y(t)| \leq \varepsilon;$$

denn bei den Schiebungen von Z wird die Abszisse x nur um ein ganzzahliges Vielfaches $n_\tau \lambda$ von λ geändert, und die Ordinate bleibt ungeändert¹. (3, 8) besagt, dass $y(t)$ eine gewöhnliche fastperiodische Funktion, insbesondere also beschränkt ist. Daraus kann man entnehmen, dass die Bewegung $F(t)$ zwischen zwei Abstandslinien von a verläuft.

¹ Vgl. den Beginn von § 2. Legt man durch die Punkte $F(t)$ und $\gamma_\tau F(t)$ die Senkrechten und die Abstandslinien zu a , so ergibt sich (3, 7) daraus, dass die Achse a die kürzeste Verbindung je zweier Senkrechten zu a ist, und (3, 8) daraus, dass die Senkrechten zu a die kürzesten Verbindungen zweier Abstandslinien von a sind.

(3, 7) besagt, dass $x(t)$ fastperiodisch modulo λ in dem in § 1 angegebenen Sinne ist. Nach dem dort genannten Satz von BOHR ist also

$$x(t) = ct + \psi(t),$$

wo c konstant und $\psi(t)$ fastperiodisch ist. Bezeichnet $G(t)$ den Punkt von a mit der Abszisse ct , so hat man in $G(t)$ eine (im nichteuklidischen Sinne) gleichförmige Bewegung auf a . Aus dem eben Gesagten kann man insbesondere entnehmen, dass

$$\text{Cos } \varrho[F(t), G(t)] = \text{Cos } \psi(t) \cdot \text{Cos } y(t)$$

und daher auch $\varrho[F(t), G(t)]$ selbst fastperiodisch, insbesondere beschränkt ist. Betrachtet man ferner die Schar $H_\theta(t)$ ($0 \leq \theta \leq 1$) von Bewegungen, deren Koordinaten $ct + (1 - \theta)\psi(t)$ und $(1 - \theta)y(t)$ sind, so erhält man schliesslich:

In der nichteuklidischen Ebene gibt es zu jeder fastperiodischen Bewegung $F(t)$ modulo einer stark diskontinuierlichen Bewegungsgruppe Γ eine Gerade a und auf dieser eine gleichförmige Bewegung $G(t)$, sodass der Abstand $\varrho[F(t), G(t)]$ beschränkt, sogar fastperiodisch ist. Ferner gibt es eine Schar $H_\theta(t)$ ($0 \leq \theta \leq 1$) von (ebenfalls modulo Γ fastperiodischen) Bewegungen, derart dass

$$H_0(t) = F(t), \quad H_1(t) = G(t)$$

und bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\varrho[H_{\theta_1}(t), H_{\theta_2}(t)] \leq \varepsilon$$

für $|\theta_2 - \theta_1| \leq \delta = \delta(\varepsilon)$ gilt.

Die Gerade a ist hierbei Achse von Bewegungen aus Γ .

In dieser Formulierung gilt der Satz auch in dem oben ausgeschlossenen Fall, dass die zyklische Gruppe Z nur aus der Identität besteht. Man hat nur die Achse a beliebig und $G(t) = G$ konstant auf a zu wählen.

§ 4. Fastperiodische Bewegungen in Killingschen Raumformen.

Es sei T wieder eine stark diskontinuierliche Bewegungsgruppe der nichteuklidischen Ebene Φ . Wir betrachten Φ modulo T ; d. h. wir fassen jede Klasse von bezüglich T äquivalenten Punkten aus Φ als einen Punkt einer neuen Mannigfaltigkeit Φ_T auf und übertragen die Metrik von Φ auf Φ_T in folgender Weise: Sind p und q zwei Punkte von Φ_T , also zwei Klassen äquivalenter Punkte von Φ , so soll unter dem Abstand $\varrho_T[p, q]$ das Minimum der nicht-euklidischen Abstände eines Punktes der Klasse p von einem Punkt der Klasse q verstanden werden. Dass dieses Minimum existiert, ist sofort zu sehen. Sind nämlich P_0, P_1, \dots die Punkte der Klasse p und Q_0, Q_1, \dots die der Klasse q , so gibt es zu jedem P_μ ein Element γ_μ von T , das P_μ in P_0 überführt. Folglich ist

$$\varrho[P_\mu, Q_\nu] = \varrho[\gamma_\mu P_\mu, \gamma_\mu Q_\nu] = \varrho[P_0, \gamma_\mu Q_\nu],$$

und $\gamma_\mu Q_\nu$ ist wieder ein Q_ν . Folglich ist es hinreichend, das Minimum von $\varrho[P_0, Q_\nu]$ für $\nu = 0, 1, \dots$ zu suchen. Dessen Existenz ergibt sich daraus, dass sich die Q_ν innerhalb Φ nicht häufen können. Zugleich folgt, dass es für genügend kleines $\varrho_T[p, q]$ auch nur ein Q_ν gibt, sodass

$$\varrho_T[p, q] = \varrho[P_0, Q_\nu]$$

wird. Da wegen der starken Diskontinuität von Γ der Abstand je zweier Q_ν mindestens k ist, können wir sogar behaupten, dass dies stets für $\varrho_\Gamma[p, q] < \frac{k}{2}$ der Fall ist.

Es sei p ein Punkt von Φ_Γ und P_0 ein beliebiger Punkt der zu p gehörigen Klasse von Punkten in Φ . Jedem Punkt q von Φ_Γ mit

$$(4, 1) \quad \varrho_\Gamma[p, q] < \frac{k}{2}$$

ordnen wir denjenigen nach dem eben Gesagten eindeutig bestimmten Punkt Q_0 von Φ zu, für den

$$\varrho_\Gamma[p, q] = \varrho[P_0, Q_0].$$

Auf diese Weise entsteht eine eineindeutige und entfernungstreue Abbildung des »Kreises« (4, 1) um p auf einen Kreis um P_0 in der nichteuklidischen Ebene Φ . Die Mannigfaltigkeit Φ_Γ ist also eine mit einer Metrik derart versehene (offene oder geschlossene) Fläche, dass es eine Zahl $r > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Jeder Kreis vom Radius r im Sinne der Metrik lässt sich umkehrbar eindeutig und entfernungstreu auf einen Kreis der nichteuklidischen Ebene abbilden.¹

¹ Man kann sich die Entstehung der Fläche Φ_Γ durch Einführung eines Fundamentalbereichs der Gruppe Γ veranschaulichen. Darunter versteht man bekanntlich einen Bereich in Φ , der von jeder Klasse bezüglich Γ äquivalenter Punkte genau einen Punkt enthält. Es gibt stets einen Fundamentalbereich, der von endlich oder abzählbar vielen (nicht-euklidischen) Strecken, Halbgeraden oder Geraden begrenzt wird. Die Gesamtheit dieser Randstücke zerfällt in Paare, so dass die Strecken (Halbgeraden, Geraden) eines Paares äquivalent, also durch Bewegungen aus Γ in einander überführbar sind. Heftet man nun je zwei äquivalente Randstücke des Bereichs zusammen (was natürlich Verzerrungen und eventuell sogar Selbstdurchdringungen des Bereichs erfordert), so erhält man ein »Modell« der oben abstrakt konstruierten Fläche Φ_Γ .

Φ ist die universelle Überlagerungsfläche von Φ_Γ , und Γ ist der Fundamentalgruppe von Φ_Γ isomorph.

Eine solche Mannigfaltigkeit Φ_Γ bezeichnen wir als hyperbolische Killingsche Raumform¹.

Ist $F(t)$ ein beliebiger stetiger Kurvenbogen in Φ , so entspricht ihm auf Φ_Γ wieder ein stetiger Bogen $f(t)$. Umgekehrt entspricht einer stetigen Kurve $f(t)$ auf Φ_Γ eine Klasse äquivalenter stetiger Kurven in Φ . Unter diesen Kurven kann man nun z. B. dadurch eine auszeichnen, dass man aus der $f(0)$ entsprechenden Klasse äquivalenter Punkte einen beliebigen als $F(0)$ wählt. Durch diese Normierung in Verbindung mit der Forderung der Stetigkeit ist dann die Bildkurve $F(t)$ von $f(t)$ eindeutig fixiert. Eine geschlossene Kurve auf Φ_Γ geht in einen Kurvenbogen über, der zwei äquivalente Punkte verbindet, und umgekehrt. Die Geraden in Φ entsprechen den geodätischen Linien auf Φ_Γ .

Wir betrachten nun eine im Sinne der eingeführten Metrik q_Γ fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ . Dieser entspricht nach Fixierung von $F(0)$ eine wohlbestimmte stetige Bewegung $F(t)$ in Φ . Ist τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, also

$$q_\Gamma[f(t+\tau), f(t)] \leq \varepsilon,$$

so folgt nach Definition des Abstandes q_Γ , dass es ein Gruppenelement $\gamma_{\tau t}$ gibt, so dass

$$q[F(t+\tau), \gamma_{\tau t} F(t)] = q_\Gamma[f(t+\tau), f(t)] \leq \varepsilon$$

ist. Das bedeutet aber, dass $F(t)$ fastperiodisch modulo Γ ist. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass jeder modulo Γ fastperiodischen Bewegung $F(t)$ in Φ eine fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ entspricht. Indem wir nun die am

¹ Vgl. HOPF [1] § 1.

Schluss des vorigen Paragraphen zusammengefassten Resultate auf $F(t)$ anwenden, erhalten wir entsprechende Aussagen für die fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf Φ_Γ .

Wir bemerken zunächst: Ist a eine Achse von Elementen der Gruppe Γ , so entspricht a auf der Fläche Φ_Γ eine geschlossene geodätische Linie; denn a verbindet ja äquivalente Punkte. Daher geht die gleichförmige Bewegung $G(t)$ auf a in eine periodische gleichförmige Bewegung $g(t)$ auf dieser geschlossenen geodätischen Linie über. Ferner folgt für die der Schar $H_\theta(t)$ entsprechende Schar $h_\theta(t)$ auf Φ_Γ

$$h_0(t) = f(t), \quad h_1(t) = g(t)$$

$$\varrho_\Gamma [h_{\theta_1}(t), h_{\theta_2}(t)] \leq \varepsilon$$

für $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta = \delta(\varepsilon)$. Das heisst:

Jede fastperiodische Bewegung $f(t)$ auf einer hyperbolischen Killingschen Raumform Φ_Γ ist einer periodischen Bewegung $g(t)$ auf Φ_Γ homotop, wobei die Bewegungen der überführenden Schar selbst fastperiodisch gewählt werden können.

Zu einer zweiten Formulierung des Satzes gelangt man, wenn man beachtet, dass die Verbindungsstrecke von $F(t)$ und $G(t)$ in Φ beschränkte Länge hat. Auf Φ_Γ übertragen besagt dies: $f(t)$ und $g(t)$ lassen sich durch einen auf Φ_Γ verlaufenden, stetig von t abhängigen Kurvenbogen beschränkter Länge verbinden.

Wir bemerken noch, dass sich die bisherigen Überlegungen fast wörtlich auf hyperbolische Killingsche Raumformen von n Dimensionen übertragen lassen. Man hat dazu nur zu beachten, dass auch jede kommutative Untergruppe einer stark diskontinuierlichen Bewegungsgruppe

des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes zyklisch ist, was ebenso wie in § 2 daraus folgt, dass jedes von der Identität verschiedene Element einer solchen Gruppe genau zwei unendlich ferne Fixpunkte besitzt.

§ 5. Fastperiodische Bewegungen auf geschlossenen Flächen und in ebenen Bereichen.

Wir wollen nun diese Resultate einerseits auf geschlossene Flächen, andererseits auf ebene Gebiete spezialisieren. Dazu haben wir zunächst festzustellen, welche Typen geschlossener Flächen sich als hyperbolische Killingsche Raumformen auffassen lassen.

Es ist eine geläufige Tatsache, dass sich jeder topologische Flächentypus mit den unten zu nennenden vier Ausnahmen aus der nichteuklidischen Ebene \mathcal{O} durch Reduktion modulo einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe Γ erhalten lässt, worunter eine Gruppe fixpunktfreier Bewegungen von \mathcal{O} verstanden wird, bei der äquivalente Punkte niemals einen Häufungspunkt in \mathcal{O} haben¹. Bei einer geschlossenen Fläche \mathcal{O}_Γ muss aber diese Gruppe Γ von selbst stark diskontinuierlich sein. Dies kann man etwa so einsehen². In der am Anfang von § 4 angegebenen Weise wird auf \mathcal{O}_Γ eine Metrik induziert, so dass jeder Punkt von \mathcal{O}_Γ eine Umgebung (Kreis im Sinne der Metrik) besitzt, die auf einen Kreis in \mathcal{O} umkehrbar eindeutig und entfernungstreu abbildbar ist. Ein solcher Kreis in \mathcal{O} kann wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung keine zwei äquivalente Punkte enthalten. Es genügt also

¹ Einen Bericht über dieses »Clifford-Kleinsche Raumproblem« findet man bei HOPF [2]. Man vergleiche ferner KLEIN [1], HOPF [1], sowie für geschlossene Flächen GIESEKING [1] und NIELSEN [1].

² HOPF [1] S. 316.

zu zeigen: Es gibt eine positive Konstante r , sodass jeder Kreis vom Radius r auf Φ_r eindeutig und entfernungs-treu auf einen Kreis in Φ abgebildet werden kann. Angenommen, dies wäre falsch. Dann gäbe es auf Φ_r eine Folge p_1, p_2, \dots von Punkten, derart dass der Radius r_ν des grössten Kreises um p_ν mit der genannten Eigenschaft gegen Null konvergiert. Die p_ν hätten wegen der Geschlossenheit von Φ_r einen Häufungspunkt p' . Um diesen gäbe es einen Kreis der obigen Beschaffenheit; es sei $r' > 0$ dessen Radius. Dann müsste für alle p_ν , deren Entfernung von p' kleiner als $\frac{r'}{2}$ ist, $r_\nu > \frac{r}{2}$ sein, womit man zu einem Widerspruch gelangt ist.

Die erwähnten Ausnahmen sind erstens die zweiseitige und die einseitige Ringfläche, bei denen man von der euklidischen Ebene statt von Φ ausgehen muss, zweitens Kugel und projektive Ebene, auf denen sich eine elliptische, aber keine hyperbolische oder euklidische Metrik einführen lässt. Diese vier Flächen haben bzw. die Eulersche Charakteristik 0, 0, 2, 1, und alle übrigen geschlossenen Flächen haben negative Eulersche Charakteristik. Der Hauptsatz von § 4 gilt also insbesondere für alle geschlossenen Flächen mit negativer Charakteristik.

Nachträglich können wir uns noch sehr leicht von der speziellen Annahme einer nichteuklidischen Metrik befreien. Es sei nämlich $\sigma[p, q]$ ein beliebiger zweiter Abstands-begriff auf der Fläche, vom dem nur verlangt werde, dass erstens $\sigma[p, q] \geq 0$ und dann und nur dann $\sigma[p, q] = 0$ ist, falls p und q identisch sind, und dass zweitens $\sigma[p, q]$ stetig von p und q abhängt. Dann ist jede im Sinne dieser Metrik fastperiodische Bewegung auch fastperiodisch bezüglich der alten Metrik $\varrho_r[p, q]$, und zwei im Sinne der

Metrik $\varrho_T[p, q]$ homotope Kurven sind auch bezüglich $\sigma[p, q]$ homotop. Um dies einzusehen, hat man offenbar nur zu zeigen, dass der Abstand zweier Punkte im Sinne der einen Metrik gleichmässig klein ist, wenn ihr Abstand im Sinne der anderen klein ist, m. a. W. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ und ein $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass

$$\varrho_T[p, q] \leq \varepsilon, \quad \text{falls } \sigma[p, q] \leq \delta$$

und

$$\sigma[p, q] \leq \varepsilon, \quad \text{falls } \varrho_T[p, q] \leq \eta.$$

Dies folgt aber unmittelbar aus der Geschlossenheit der Fläche. Wäre nämlich die erste Behauptung falsch, so gäbe es eine gegen einen Punkt, etwa p , konvergierende Folge von Punktepaaaren p_ν, q_ν mit $\sigma[p_\nu, q_\nu] \rightarrow 0$ und $\varrho_T[p_\nu, q_\nu] > \varepsilon$. Also wäre $\varrho_T[p, p] \geq \varepsilon > 0$. Ebenso ergibt sich die zweite Behauptung. Wir haben daher:

Auf einer geschlossenen Fläche mit negativer Eulerscher Charakteristik sei eine beliebige Metrik eingeführt. Dann ist jede bezüglich dieser Metrik fastperiodische Bewegung auf der Fläche einer periodischen Bewegung homotop. Hierbei können die Bewegungen der überführenden Schar fastperiodisch gewählt werden.

Für eine gewöhnliche Fläche ohne Selbstdurchdringungen im Raume kann man z. B. als Abstand zweier Flächenpunkte ihren euklidischen Abstand wählen.

Wir betrachten nun ein ebenes Gebiet von endlichem Zusammenhang > 1 , das wir uns der Einfachheit halber von endlich vielen Kreisen begrenzt denken. Es ist unschwer einzusehen, dass ein solches Gebiet als hyperbolische Killingsche Raumform aufgefasst werden kann, sodass die

früheren Resultate anwendbar sind. Der in der Einleitung genannte Satz, dass jede (im gewöhnlichen Sinne) fastperiodische Bewegung in einem solchen Gebiet einer periodischen Bewegung homotop ist, lässt sich aber auch, wie jetzt gezeigt werden soll, unmittelbar aus dem vorstehenden Satz über geschlossene Flächen entnehmen.

Zunächst bemerken wir, dass wir das Gebiet als mindestens dreifach zusammenhängend annehmen können. Denn bei einem zweifach zusammenhängenden Gebiet haben wir es mit einer fastperiodischen Funktion $f(t)$ zu tun, für die bei einem passenden a

$$|f(t) - a| \geq k > 0$$

gilt. Nach dem BOHRschen Satz ist also

$$f(t) - a = |f(t) - a| e^{i(ct + \psi(t))} = e^{ict} |f(t) - a| e^{i\psi(t)},$$

wo $\psi(t)$ fastperiodisch und c konstant ist. Die Schar

$$h_\theta(t) = e^{ict} (|f(t) - a| e^{i\psi(t)})^{1-\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

führt $f(t)$ offenbar gleichmässig stetig in die periodische Bewegung e^{ict} über und verbleibt im Gebiet, wenn dieses in der Form $0 < k \leq |z - a| \leq K$ mit $k < 1 < K$ angenommen wird, was ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist.

Es sei also G ein mindestens dreifach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene, das von endlich vielen Kreisen begrenzt ist, und $f(t)$ eine fastperiodische Bewegung in G . Wir errichten über G als Grundfläche einen geraden Zylinder der Höhe 1. Dieser Zylinder ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht $p > 1$, hat also negative Eulersche Charakteristik $2 - 2p$. Als Abstand auf dieser Fläche wäh-

len wir den räumlichen euklidischen Abstand, der für die Punkte von G mit dem ebenen Abstand übereinstimmt. Dann ist $f(t)$ auch auf der Fläche fastperiodisch, also nach dem Obigen einer periodischen Bewegung auf der Fläche homotop. Projizieren wir nun die ganze Fläche senkrecht auf G zurück, so geht diese periodische Bewegung in eine periodische Bewegung $g(t)$ in G über, und $f(t)$ ist $g(t)$ homotop in G ; denn bei der Projektion können die Abstände höchstens verkleinert werden.

§ 6. Die Ausnahmefälle.

In der euklidischen x, y -Ebene E betrachten wir die Translationsgruppe T

$$x' = x + m, \quad y' = y + n,$$

wo m und n ganze Zahlen sind. Diese Gruppe ist stark diskontinuierlich, da ja der Abstand äquivalenter Punkte mindestens 1 ist. Die euklidische Ebene modulo T ist eine Ringfläche E_T .

Es ist leicht zu sehen, dass jede periodische Bewegung auf E_T einer gleichförmigen Bewegung auf einer geschlossenen geodätischen Linie homotop ist. Einer solchen gleichförmigen Bewegung auf E_T entsprechen in E gleichförmige Bewegungen auf Geraden mit rationalem Richtungstangens, da diese Geraden äquivalente Punkte, also Punkte mit ganzzahligen Koordinatendifferenzen verbinden müssen.

Wir betrachten nun die gleichförmige Bewegung

$$x(t) = t, \quad y(t) = \mu t$$

in E , wo μ eine irrationale Konstante ist. Diese Bewegung ist fastperiodisch modulo T ; denn die Koordinaten sind sogar periodisch modulo T . Auf E_T entspricht ihr also eine fastperiodische Bewegung (und zwar eine gleichförmige

Bewegung auf einer offenen geodätischen Linie). Wäre nun diese Bewegung auf E_T einer periodischen homotop, so müsste die Gerade $y = \mu x$ beschränkten Abstand von einer Geraden mit rationalem Richtungstangens haben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, dass der Hauptsatz von § 5 für die Torusfläche nicht gilt.

Ganz ähnlich schliesst man bei der einseitigen Ringfläche. Man hat dann nur von der Gruppe

$$x' = x + m, \quad y' = (-1)^m y + n \quad (m, n \text{ ganz})$$

auszugehen.

Man kann ohne Mühe die plausible Behauptung beweisen, dass sich jede fastperiodische Bewegung auf der Kugelfläche gleichmässig stetig in einen Punkt überführen lässt. Ob sich aber die Bewegungen der überführenden Schar wie bei den Flächen negativer Charakteristik fastperiodisch wählen lassen, muss dahingestellt bleiben. Vermutlich trifft dies nicht zu.

Identifiziert man je zwei diametrale Punkte der Kugel, so entsteht die projektive Ebene; als Abstand zweier Punkte der projektiven Ebene sei der Abstand der entsprechenden Paare diametraler Punkte gewählt. Jeder stetigen Bewegung $f(t)$ in der projektiven Ebene entspricht daher nach Fixierung des Bildpunktes $F(0)$ von $f(0)$ eine eindeutig bestimmte stetige Bewegung $F(t)$ auf der Kugel. Ist ν eine zu einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gehörige Verschiebungszahl von $f(t)$, so ist 2ν eine zu 2ε gehörige Verschiebungszahl von $F(t)$; hieraus entnimmt man, dass $F(t)$ fastperiodisch ist, wenn $f(t)$ fastperiodisch ist; umgekehrt ist natürlich auch $f(t)$ fastperiodisch, wenn $F(t)$ fastperiodisch ist. Daher lässt sich auch jede fastperiodische Bewegung in der projektiven Ebene gleichmässig stetig in einen Punkt überführen.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

- H. BOHR: [1] Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. [Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. **10** Nr. 10, 5—11 (1930).]
— [2] Über fastperiodische ebene Bewegungen. [Comment. math. helv. **4**, 51—64 (1932).]
- H. GIESEKING: [1] Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen. [Diss. Münster 1912.]
- H. HOPF: [1] Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. [Math. Ann. **95**, 313—339 (1925).]
— [2] Differentialgeometrie und topologische Gestalt. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **41**, 209—229 (1932).
- B. JESSEN: [1] Über die Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion. [Erscheint in den Math. Ann.]
- F. KLEIN: [1] Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. [J. Springer, Berlin 1928.] Kap. IX.
- J. NIELSEN: [1] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. [Acta math. **50**, 189—358 (1927).]
- A. WINTNER: [1] Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) **11**, 464—467 (1930).]
— [2] Über eine Anwendung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf das Levi-Civitasche Problem der mittleren Bewegung. [Ann. Mat. pura appl. (4) **10**, 277—282 (1932).]
-

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 7.

VARIÉTÉS DÉVELOPPANTES ET
VARIÉTÉS DÉVELOPPÉES

PAR

FR. FABRICIUS-BJERRE



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Nous allons étudier deux espèces de variétés, V^n et W^n , situées dans un espace S^{n+p} , $p \geq n$, à courbure constante K_0 . Les variétés seront caractérisées par la propriété suivante:

»Les espaces tangents à W^n doivent être espaces normaux à V^n «.

Dans le cas $n = 1$ ce problème est complètement résolu. Les courbes V^1 sont les développantes de la courbe W^1 ; les courbes W^1 les développées de la courbe V^1 . — Nous ne considérons que les cas $n \geq 2$.

Soit

$$x = x(u^1, u^2 \dots u^n)$$

l'équation vectorielle de la variété V^n . Posons $x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$, $x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k}$ et $g_{ik} = x_i x_k$, et attachons en chaque point de V^n un p-èdre rectangulaire $\xi^1, \xi^2 \dots \xi^p$, les vecteurs ξ^v étant vecteurs unitaires, normaux à la variété. Les vecteurs x_{ik} et $\xi_i^v = \frac{\partial \xi^v}{\partial u^i}$ sont donnés par les équations¹

$$(1) \quad x_{ik} = \Gamma_{ik}^l x_l + \beta_{ik}^v \xi^v - K_0 g_{ik} x$$

$$(2) \quad \xi_i^v = -\beta_{ik}^v g^{kl} x_l + b_i^{\sigma\nu} \xi^\sigma$$

$\left(\begin{array}{l} i, k, l = 1, 2 \dots n \\ \sigma, \nu = 1, 2 \dots p \end{array} \right)$

On peut choisir le vecteur ξ^1 de sorte que l'équation de la variété W^n puisse s'écrire

$$(3) \quad y = \lambda^0 x + \lambda \xi^1.$$

¹ Voir L. P. EISENHART: Riemannian Geometry, Princeton 1926, p. 211.

λ et λ^0 dépendent des variables $u^1, u^2 \dots u^n$ et satisfont à l'équation

$$\frac{(\lambda^0)^2}{K_0} + \lambda^2 = \frac{1}{K_0}.$$

En différentiant l'équation (3) et en faisant usage de (2) on obtient

$$(4) \quad y_i = \lambda_i^0 x + \lambda^0 x_i - \lambda \beta_{ik}^1 g^{kl} x_l + \lambda b_i^{\sigma 1} \xi^\sigma + \lambda_i \xi^1.$$

Comme l'espace tangent à W^n doit être espace normal à V^n , il est nécessaire que

$$\lambda^0 x_i - \lambda \beta_{ik}^1 g^{kl} x_l = 0$$

$$(5) \quad \lambda^0 g_{ik} - \lambda \beta_{ik}^1 = 0;$$

c. a. d. les directions principales du tenseur β_{ik}^1 sont indéterminées. L'équation (4) se réduit à

$$(6) \quad y_i = \lambda_i^0 x + \lambda_i \xi^1 + \lambda b_i^{\sigma 1} \xi^\sigma.$$

En outre l'espace tangent à W^n doit contenir la droite (3). Par conséquent, on pourra trouver des différentielles $du^1, du^2 \dots du^n$ telles que

$$b_i^{\sigma 1} du^i = 0$$

$$(7) \quad dy = d\lambda^0 x + d\lambda \xi^1.$$

L'équation (7) montre que, dans l'espace tangent à V^n , il y a au moins une direction, où les normales consécutives se coupent. Donc la variété V^n contient au moins une congruence de lignes de courbure. — Inversement, si les équations (5) et (7) sont satisfaites, l'espace tangent à W^n sera espace normal à V^n . Par suite nous pouvons énoncer le théorème:

Pour qu'une variété V^n soit variété développante, il faut et il suffit qu'il y ait dans V^n une congruence de lignes de courbure, et que les directions principales du tenseur β_{ik}^1 , appartenant aux normales correspondantes, soient indéterminées.

Une ligne de courbure de V^n correspond à une courbe géodésique de W^n . La géodésique est la développée de la ligne de courbure, et la variété V^n sera parcourue par les développantes de la congruence de géodésiques de W^n .

Choisissons maintenant ces géodésiques comme courbes génératrices u^1 . La forme différentielle première de W^n peut s'écrire

$$(8) \quad ds^2 = (du^1)^2 + \bar{g}_{ik} du^i du^k \quad (i, k \neq 1)$$

et l'équation de V^n devient

$$(9) \quad x = \mu^0 y + \mu y_1$$

ou

$$\frac{(\mu^0)^2}{K_0} + \mu^2 = \frac{1}{K_0}.$$

L'espace tangent à V^n est déterminé par

$$(10) \quad x_k = \mu_k^0 y + \mu^0 y_k + \mu_k y_1 + \mu y_{1k}.$$

Nous avons exigé que la variété V^n soit orthogonale aux espaces tangents de W^n . D'où il suit que les vecteurs $y, y_1, y_2 \dots y_n$ doivent être orthogonaux aux vecteurs $x_1, x_2 \dots x_n$. Donc on aura les relations

$$(11) \quad y x_k = 0$$

$$(12) \quad y_i x_k = 0.$$

L'équation (11) donne

$$\frac{\mu_k^0}{K_0} - \mu \bar{g}_{1k} = 0$$

et pour $k = 1, k \neq 1$:

$$\mu_1^0 - \mu K_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_k^0 = 0.$$

On voit alors que μ^0 ne dépend que de la variable u^1 .

En posant $i = 1$, l'équation (12) donnera

$$\mu^0 \bar{g}_{1k} + \mu_k = 0$$

et pour $k = 1, k \neq 1$

$$\mu^0 + \mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_k = 0.$$

Par conséquent: μ ne dépend que de la variable u^1 .

Les fonctions μ^0 et μ sont déterminées par les équations

$$(13) \quad \frac{d^2 \mu}{(du^1)^2} + K_0 \mu = 0; \quad \mu^0 = -\frac{d\mu}{du^1}.$$

Considérons le cas où i et k sont différents de l'unité.

On a

$$\mu^0 \bar{g}_{ik} + \mu \bar{\Gamma}_{i,1k} = 0$$

$$-\frac{d\mu}{du^1} \bar{g}_{ik} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial u^1} = 0$$

et par intégration

$$\underline{\bar{g}_{ik} = \mu^2 \gamma_{ik}}$$

dont les fonctions γ_{ik} dépendent seulement des variables $u^2, u^3 \dots u^n$. La forme (8) est réduite à

$$(14) \quad ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2 \gamma_{ik} du^i du^k. \quad (i, k \neq 1)$$

Le ds^2 d'une variété développée W^n peut s'écrire

sous la forme (14). On voit facilement que cette condition est aussi suffisante.

Nous continuerons l'examen des variétés W^n en considérant un à un les deux cas: $n = 2$, $n > 2$.

$n = 2$.

La variété W^n est une surface W^2 . La forme (14) s'écrit

$$ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2 \gamma_{ik}(u^2) (du^2)^2$$

ou

$$ds^2 = (du^1)^2 + \mu^2 dv^2.$$

Comme μ satisfait à l'équation (13) la surface est à courbure constante K_0 .

La courbure gaussienne d'une surface développée W^2 est constante et égale à la courbure de l'espace ambiant.

Toutes les géodésiques de la congruence de W^2 , ainsi que les lignes de courbure de V^2 passent par le point $\mu^0 = 1$, $\mu = 0$, c. a. d. le point d'intersection des surfaces W^2 et V^2 . Néanmoins, ce point n'a aucune position singulière sur la variété W^2 . On en déduit

A une surface à courbure constante K_0 correspondent ∞^2 surfaces développantes V^2 .

En général ces surfaces ne sont pas parallèles, mais elles ont un plan normal commun. La distance de deux points correspondants de deux surfaces développantes V^2 et V'^2 est invariable.

Il est maintenant possible de résoudre complètement le problème suivant: Quelles surfaces pourront être engendrées par développement d'une surface à courbure constante K_0 , située dans un S^{2+p} , pourvu qu'on développe des géodésiques passant par le même point?

Si $p \geq 3$ on obtient en général ∞^2 surfaces développantes, caractérisées par le théorème p. 5. Seulement si l'espace normal principal se réduit à un plan, les surfaces seront à torsion nulle.¹

Si $p = 2$ on obtient en général des surfaces à torsion nulle.

Enfin, si $p = 1$, le développement ne donne qu'une courbe gauche.

$n > 2$.

On peut sans difficulté donner une signification géométrique de la forme (14). Toutes les géodésiques considérées de W^n , ainsi que les lignes de courbure de V^n , passent par le point d'intersection A des deux variétés. Les variétés $u^1 = \text{const.}$ sont des hypersphères géodésiques de centre A ; elles sont homothétiques, le pôle étant A .

La surface de coordonnées $u^1 u^2$ est développable et sa courbure gaussienne est égale à K_0 en tout point de la surface. Cette propriété se réalise non seulement pour la surface $u^1 u^2$, mais pour toute surface géodésique, issue du point A . Donc la variété sera isotrope en A , et W^n est une variété de SCHUR², dont le centre est le point A . Nous pouvons alors énoncer le théorème:

Pour qu'une variété W^n soit variété développée, il faut et il suffit qu'elle soit variété de Schur.

Généralement les variétés de Schur ne possèdent qu'un centre:

A une variété de Schur ne correspond qu'une seule variété développante.

Un théorème de Schur dit que tous les points d'une

¹ Voir ma Thèse: Differentialgeometriske undersøgelser af torsionsfri flader beliggende i rum med konstant krumning, Copenhague 1934, p. 62.

² Voir Math. Ann. T. 27, 1886, p. 560—62.

variété, qui possède deux centres, sont isotropes, et que la courbure de la variété est constante K_0 . Par suite

S'il existe deux variétés développantes à la même variété développée W^n , il y en a ∞^n ; la courbure riemannienne de W^n est constante et égale à celle de l'espace ambiant.

Deux variétés développantes appartenant à la même variété W^n ne sont pas parallèles. Leur distance est invariable et elles ont en commun un espace normal à n dimensions (l'espace tangent à W^n). Si l'espace normal principal de W^n possède juste n dimensions, les variétés développantes seront à torsion nulle¹. Elles seront parallèles et l'espace normal commun sera à p dimensions.

Si les variétés V^n et W^n sont situées dans un espace euclidien, et W^n est une variété euclidienne, on peut exposer les équations des ∞^n variétés V^n sous une forme très simple. Au lieu de l'équation (9) nous posons

$$x = y + \mu^i y_i.$$

Les vecteurs tangents sont déterminés par:

$$x_k = y_k + \mu_k^i y_i + \mu^i y_{ik}.$$

On aura les n^2 équations de condition

$$(15) \quad x_k y_j = 0.$$

Pour la variété euclidienne W^n on peut choisir un système de coordonnées cartésiennes de sorte qu'on obtienne

$$\bar{g}_{ik} = \delta_k^i \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_{j,ik} = 0.$$

¹ Voir le note p. 8.

Par suite les équations (15) donnent

$$\delta_k^j + \mu_k^j = 0,$$

et par intégration

$$\mu^j = c^j - u^j,$$

c^j sont des constantes arbitraires. — Donc les équations des V^n peuvent s'écrire sous la forme

$$\underline{x = y + (c^i - u^i) y_i.}$$

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 8.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR
THEORIE DER FASTPERIODISCHEN
FUNKTIONEN

V

VON

HARALD BOHR



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Über den Quotienten zweier analytischer fastperiodischer Funktionen.

In der Abhandlung »Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III« (Acta Mathematica, Bd. 47), in welcher die allgemeine Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ entwickelt wurde, habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, und es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktionen, von denen $g(s)$ im ganzen Streifen (α, β) von Null verschieden ist. Dann ist der Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ ebenfalls eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion.

In der vorliegenden Note soll die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes bewiesen werden.

Satz: Es sei $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, und es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktionen, von denen $g(s)$ nicht identisch verschwindet. Ferner sei der Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ im ganzen Streifen (α, β) regulär, d. h. jede im Streifen (α, β) gelegene Nullstelle von $g(s)$ sei zugleich Nullstelle von $f(s)$, und zwar von mindestens eben so hoher Multiplizität. Dann ist dieser Quotient $h(s)$ wiederum eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion¹.

¹ Zur Orientierung sei bemerkt, dass es — wie durch einfache Beispiele leicht zu zeigen — sehr wohl vorkommen kann, dass die Projektionen der Nullstellen von $g(s)$ auf die reelle Achse im ganzen Intervall $\alpha < \sigma < \beta$ überall dicht liegen.

Auf den Zusammenhang dieses Satzes — für den Spezialfall $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, d. h. für den Fall, wo $f(s)$ und $g(s)$ ganze Funktionen sind — mit einem schönen, auf Quotienten von Exponentialpolynomen bezüglichen Satz von RITT¹ wird am Schluss dieser Note kurz eingegangen.

Zum Beweise unseres Satzes wird, ausser bekannten Eigenschaften fastperiodischer Funktionen, ein allgemeiner funktionentheoretischer Hilfssatz herangezogen, den ich übrigens, da es für den vorliegenden Zweck genügt, nur für eine spezielle geometrische Konfiguration formuliere.

Hilfssatz: In der komplexen s -Ebene seien zwei parallel den Achsen orientierte Rechtecke R' und R'' mit dem gemeinsamen Mittelpunkt s^* gegeben, von denen R' im Inneren von R'' gelegen ist. Ferner seien die beiden positiven Zahlen k und $K > k$ fest gegeben. Dann gibt es eine positive Konstante

$$\eta_0 = \eta_0(R', R'', s^*, k, K)$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jeder im Innern von R'' regulären analytischen Funktion $\varphi(s)$, welche innerhalb R'' dem Betrage nach $\leq K$, dagegen im Punkte s^* dem Betrage nach $\geq k$ ist, lässt sich ein achsenparalleles Rechteck $R(= R_\varphi)$, das innerhalb R'' gelegen ist, aber R' in seinem Innern enthält, derart wählen, dass in jedem Randpunkt s dieses Rechtecks R die Ungleichung

$$|\varphi(s)| > \eta_0$$

besteht.

Auf den (übrigens sehr einfachen) Beweis dieses Hilfssatzes wollen wir hier nicht eingehen, sondern uns mit

¹ J. F. RITT. On the zeros of exponential polynomials, Transact. American Math. Society Bd. 31 (1929) S. 680—686.

dem Hinweis begnügen, dass der Satz z. B. als unmittelbares Korollar der beiden Hilfssätze 2 und 3 einer von Herrn JESSEN und dem Verfasser gemeinsam verfassten Arbeit über die Werteverteilung der speziellen fastperiodischen Funktion $\zeta(s)$ (Acta Mathematica Bd. 54, S. 18—19) abgeleitet werden kann.

Beweis: Die Behauptung unseres Satzes lautet, dass bei beliebiger Wahl von zwei den Bedingungen $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ genügenden Zahlen α' und β' die Funktion $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ in (α', β') fastperiodisch ist, dass es also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dicht liegende Menge von zu $h(s)$ im Streifen (α', β') gehörigen Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gibt, d. h. Zahlen τ , welche für alle s des Streifens (α', β') der Ungleichung

$$|h(s + i\tau) - h(s)| \leq \varepsilon$$

genügen.

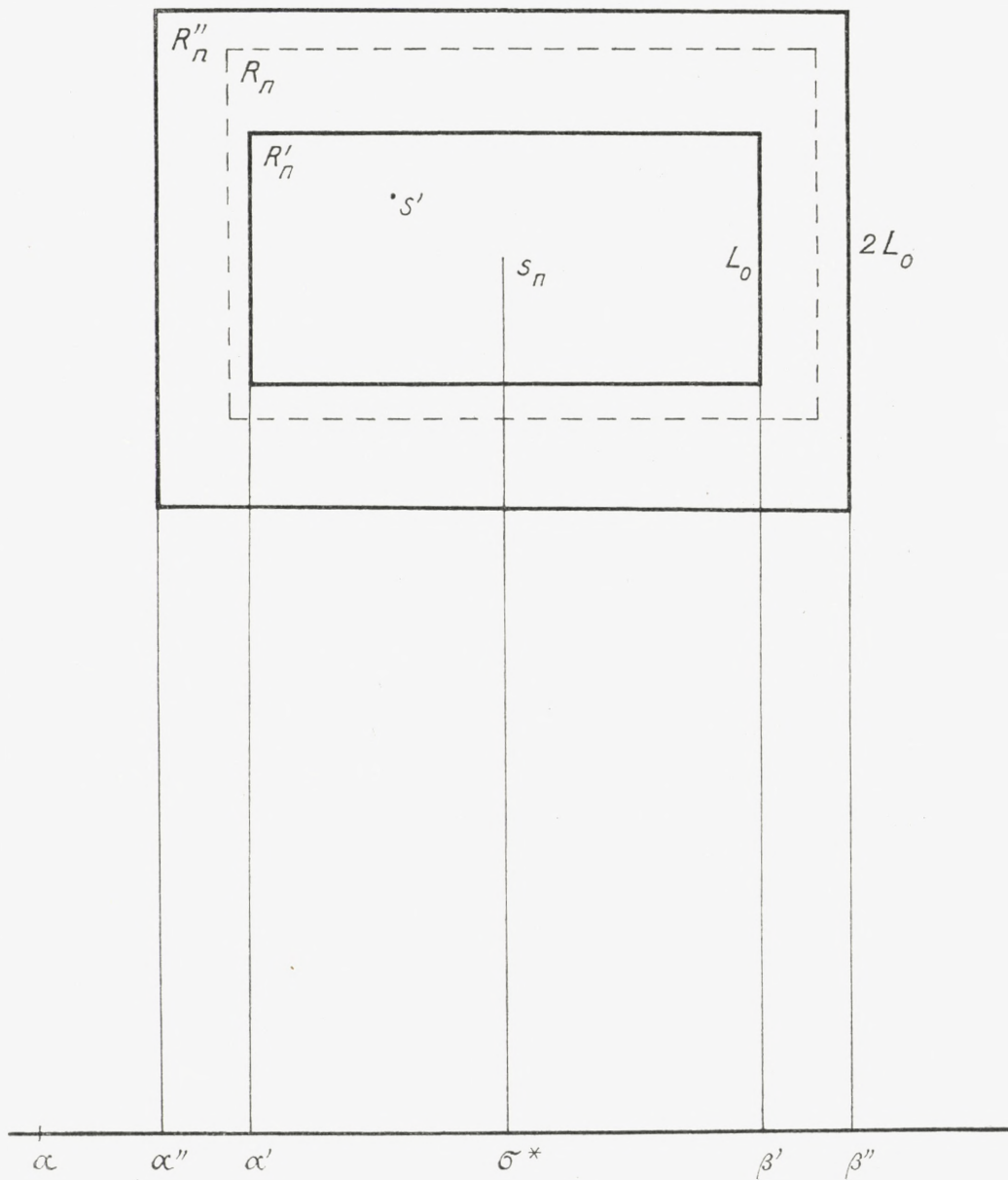
Zu diesem Zweck wählen wir zunächst (siehe die Figur) zu den (schon festgelegten) Zahlen α' und β' zwei weitere Zahlen α'' und β'' zwischen α und α' bzw. β und β' ; der Einfachheit halber sei etwa $\alpha' - \alpha'' = \beta'' - \beta'$, sodass die beiden Intervalle (α', β') und (α'', β'') denselben Mittelpunkt $\sigma^* = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta'')$ besitzen. Wir betrachten den Nenner $g(s)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma^*$; wegen der Fastperiodizität der (nicht identisch verschwindenden) Funktion $\gamma(t) = g(\sigma^* + it)$ der reellen Veränderlichen t lässt sich eine positive Konstante k_0 , eine Länge L_0 und eine abzählbare Menge von reellen Zahlen

$$(-\infty \leftarrow t_{-n}) \dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots (t_n \rightarrow \infty)$$

so wählen, dass

$$t_{n+1} - t_n < L_0 \quad (\text{für alle } n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots)$$

und



$| \gamma(t_n) | = | g(\sigma^* + it_n) | > k_0$ (für alle n)
gilt.

Für jeden Wert von n betrachten wir die beiden achsenparallelen Rechtecke R'_n und R''_n mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $s_n = \sigma^* + it_n$, deren Eckpunkte auf den vertikalen Geraden $\sigma = \alpha'$, $\sigma = \beta'$ bzw. $\sigma = \alpha''$, $\sigma = \beta''$ liegen, und deren vertikale Seiten die Längen L_0 bzw. $2L_0$ haben. Durch eine vertikale Parallelverschiebung um die Länge $t_{n+1} - t_n$ geht also die Konfiguration (R'_n, R''_n, s_n) in die Konfiguration $(R'_{n+1}, R''_{n+1}, s_{n+1})$ über. Da die Differenz $t_{n+1} - t_n$ für jedes n kleiner als die vertikale Seitenlänge L_0 der Rechtecke R' ist, gehört jeder Punkt s des Streifens (α', β') dem Innern wenigstens eines unserer Rechtecke R'_n an.

Wir betrachten nun die Nennerfunktion $g(s)$ im Rechteck R''_n der Konfiguration (R'_n, R''_n, s_n) . Innerhalb R''_n ist $|g(s)| < K_0$, wo K_0 die (endliche) obere Grenze von $|g(s)|$ im ganzen Streifen (α'', β'') bezeichnet, und im Mittelpunkt s_n ist $|g(s_n)| > k_0$. Da die verschiedenen Konfigurationen (R'_n, R''_n, s_n) einander kongruent sind und durch vertikale Parallelverschiebungen z. B. in die feste Konfiguration (R'_0, R''_0, s_0) überführt werden können, ergibt sich aus dem obigen Hilfssatz die Existenz einer festen, d. h. von n unabhängigen positiven Zahl η_0 , nämlich

$$\eta_0 = \eta_0(R'_0, R''_0, s_0, k_0, K_0)$$

im Sinne des Hilfssatzes, mit der Eigenschaft, dass es für jedes n ein R'_n umschliessendes, innerhalb R''_n gelegenes achsenparalleles Rechteck R_n gibt, auf dessen ganzem Rand die Ungleichung

$$|g(s)| > \eta_0$$

erfüllt ist.

Die zu beweisende Fastperiodizität von $h(s)$ im Streifen (α', β') ist offenbar dargetan, wenn wir folgendes beweisen können: Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, derart dass jede Zahl τ , welche sowohl für die Funktion $f(s)$ als auch für die Funktion $g(s)$ im Streifen (α'', β'') eine zu δ gehörige Verschiebungszahl ist, zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(s)$ im Streifen (α', β') ist; denn nach bekannten Sätzen über fastperiodische Funktionen gibt es für den Streifen (α'', β'') relativ dicht liegende gemeinsame Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\delta)$ der beiden fastperiodischen Funktionen $f(s)$ und $g(s)$.

Es sei C eine gemeinsame (endliche) obere Schranke der beide Funktionen $|f(s)|$ und $|g(s)|$ im Streifen (α'', β'') . Dann, behaupte ich, besitzt die Zahl

$$\delta = \text{Min} \left\{ \frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0^2 \varepsilon}{4C} \right\} = \delta(\varepsilon)$$

die gewünschte Eigenschaft. Mit anderen Worten: Ist τ eine beliebige zu δ gehörige gemeinsame Verschiebungszahl von $f(s)$ und $g(s)$ in (α'', β'') , so ist τ zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl des Quotienten $h(s)$ in (α', β') , d. h. es besteht die Ungleichung

$$(*) \quad |h(s + i\tau) - h(s)| \leq \varepsilon$$

für alle s des Streifens (α', β') .

Um die Richtigkeit der Ungleichung (*) in einem beliebig gewählten festen Punkt $s = s'$ des Streifens (α', β') zu beweisen, bestimmen wir zunächst zu dem betrachteten Punkt s' eine ganze Zahl n derart, dass s' dem Rechteck R'_n angehört, was nach einer oben gemachten Bemerkung möglich ist. Dann liegt s' a fortiori innerhalb des Rechtecks

R_n . Nun ist die Funktion $h(s)$, und daher auch die Funktion $\{h(s+i\tau) - h(s)\}$ nach Voraussetzung im ganzen Streifen (α, β) , also gewiss innerhalb und auf dem Rande unseres Rechtecks R_n regulär. Folglich gilt nach dem Maximumprinzip

$$|h(s' + i\tau) - h(s')| \leq \underset{\text{auf } R_n}{\text{Max}} |h(s + i\tau) - h(s)|.$$

Zum Beweis der Ungleichung $|h(s' + i\tau) - h(s')| \leq \varepsilon$ genügt es also, die Ungleichung

$$\underset{\text{auf } R_n}{\text{Max}} |h(s + i\tau) - h(s)| \leq \varepsilon$$

zu beweisen. Diese ergibt sich aber unmittelbar daraus, dass auf dem ganzen Rande des Rechteckes R_n

$$|g(s)| > \eta_0$$

ist. In der Tat gilt für einen beliebigen Randpunkt s von R_n die Ungleichung

$$|g(s + i\tau)| \geq |g(s)| - |g(s + i\tau) - g(s)| > \eta_0 - \delta \geq \frac{\eta_0}{2},$$

also

$$\begin{aligned} |h(s + i\tau) - h(s)| &= \left| \frac{f(s + i\tau)}{g(s + i\tau)} - \frac{f(s)}{g(s)} \right| \\ &= \frac{|g(s)f(s + i\tau) - f(s)g(s + i\tau)|}{|g(s + i\tau)| |g(s)|} \\ &\leq \frac{|g(s)| |f(s + i\tau) - f(s)| + |f(s)| |g(s) - g(s + i\tau)|}{|g(s + i\tau)| |g(s)|} \\ &\leq \frac{C\delta + C\delta}{\frac{\eta_0}{2} \cdot \eta_0} = \frac{4C\delta}{\eta_0^2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Es wurde schon oben erwähnt, dass das Ergebnis dieser Abhandlung eine gewisse Beziehung zu einem schönen Satz von RITT über Exponentialpolynome hat. Der Satz von RITT lautet:

Es seien $P(s) = \sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$ und $Q(s) = \sum_1^M b_n e^{\mu_n s}$ zwei Exponentialpolynome, für welche der Quotient $R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ eine in der ganzen s -Ebene reguläre Funktion ist. Dann ist diese ganze Funktion $R(s)$ wiederum ein Exponentialpolynom $R(s) = \sum_1^L c_n e^{\nu_n s}$.

In diesem RITTSchen Satz dürfen die Exponenten λ_n und μ_n beliebige komplexe Zahlen sein. Im Zusammenhang mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen interessiert uns aber nur der Spezialfall, wo die Exponenten λ_n und μ_n (und damit von selbst die Exponenten ν_n) reell sind; nur in diesem Fall sind ja die Exponentialpolynome fastperiodische Funktionen. Um den RITTSchen Satz für diesen Fall in natürlicher Weise der Theorie der fastperiodischen Funktionen unterzuordnen, d. h. als Spezialfall eines allgemeinen Satzes über solche Funktionen aufzufassen, führen wir zunächst die folgenden Bezeichnungen ein.

Eine in einem Streifen $[\alpha, \beta]$ analytische fastperiodische Funktion, in deren Dirichlet-Entwicklung $\sum A_n e^{\lambda_n s}$ die Exponenten λ_n nach unten beschränkt sind — und die deshalb bekanntlich von selbst in der ganzen Halbebene $[-\infty, \beta]$ als analytische fastperiodische Funktion existiert — soll vom Typus A heißen, wenn die Exponentenmenge im Endlichen keine Häufungsstelle besitzt, mit anderen Worten, wenn die Glieder so geordnet werden können, dass die Exponentenfolge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ monoton wächst und gegen $+\infty$ strebt, falls sie nicht nur aus endlich vielen Gliedern besteht. Entsprechend soll eine in $[\alpha, \beta]$ analytische

fastperiodische Funktion, deren Exponenten nach oben beschränkt sind — und die deshalb als analytische fastperiodische Funktion in $[\alpha, +\infty]$ existiert — vom Typus B heissen, falls die Exponentenmenge keine Häufungsstelle im Endlichen besitzt, also in eine monoton abnehmende Folge geordnet werden kann, die gegen $-\infty$ strebt, falls sie nicht nur endlich viele Glieder enthält.

Es gelten dann die Sätze:

Satz a. Es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[-\infty, \beta]$ analytische fastperiodische Funktionen, die beide vom Typus A sind, und deren Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ in der ganzen Halbebene $\sigma < \beta$ regulär ist. Dann gehört diese, nach dem Hauptsatz dieser Abhandlung gewiss in $[-\infty, \beta]$ fastperiodische Funktion $h(s)$ ebenfalls zum Typus A .

Satz b. Es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, +\infty]$ analytische fastperiodische Funktionen vom Typus B , deren Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ für $\sigma > \alpha$ regulär und daher in $[\alpha, +\infty]$ fastperiodisch ist. Dann ist dieser Quotient $h(s)$ wiederum vom Typus B .

Bemerkung. Aus diesen beiden Sätzen a und b ergibt sich natürlich als sehr spezieller Fall der RITTSche Satz für Exponentialpolynome mit reellen Exponenten; denn ein solches Exponentialpolynom lässt sich ja gerade als eine fastperiodische Funktion charakterisieren, die sowohl vom Typus A als auch vom Typus B ist. Hervorzuheben ist, dass die Dirichlet-Entwicklung einer fastperiodischen Funktion vom Typus A oder B nirgends im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren braucht, so dass unsere Sätze nicht in den allgemeineren interessanten Resultaten von RITT

über algebraische Funktionen von gewöhnlichen Dirichlet'schen Reihen enthalten sind. Auf den Zusammenhang dieser weitergehenden Resultate von RITT mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen gedenke ich in einer späteren Arbeit einzugehen.

Natürlich genügt es, einen der Sätze a und b, etwa den Satz a zu beweisen. Es mögen die Dirichlet-Entwicklungen von $f(s)$ und $g(s)$ in $[-\infty, \beta]$ durch $\sum A_n e^{\mathcal{A}_n s}$ bzw. $\sum B_n e^{M_n s}$ gegeben sein, wobei \mathcal{A}_1 bzw. M_1 die kleinsten Exponenten von $f(s)$ bzw. $g(s)$ bezeichnen. Dann gelten bekanntlich für $\sigma \rightarrow -\infty$ (gleichmässig in t) die Beziehungen

$$f(s) = A_1 e^{\mathcal{A}_1 s} + o(e^{\mathcal{A}_1 \sigma}), \quad g(s) = B_1 e^{M_1 s} + o(e^{M_1 \sigma})$$

und daher auch

$$h(s) = \frac{f(s)}{g(s)} = C_1 e^{N_1 s} + o(e^{N_1 \sigma}),$$

wo

$$C_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad N_1 = \mathcal{A}_1 - M_1.$$

Es sind daher nach bekannten Sätzen über fastperiodische Funktionen die Exponenten der Entwicklung $\sum C_n e^{N_n s}$ von $h(s)$ nach unten beschränkt, und es gibt unter ihnen einen kleinsten, nämlich $N_1 = \mathcal{A}_1 - M_1$. Zu beweisen ist, dass die Menge der Exponenten N_n keine Häufungsstelle im Endlichen besitzt. Dies folgt aus dem Multiplikationssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen, nach welchem die Gleichung $f(s) = g(s) \cdot h(s)$ die entsprechende formale Relation

$$\sum A_n e^{\mathcal{A}_n s} = \sum B_n e^{M_n s} \cdot \sum C_n e^{N_n s}$$

nach sich zieht.

Hätte nämlich die Menge der N_n im Endlichen gelegene Häufungsstellen und wäre F deren kleinste, so wäre offen-

bar $F^* = M_1 + F$ eine Häufungsstelle der Menge $M_1 + N_n$ ($n = 1, 2, \dots$) und zwar die kleinste; dann wäre aber F^* auch eine Häufungsstelle der Exponentenmenge \mathcal{A}_n , d. h. sie könnte bei der Zusammenfassung der durch die formale Reihenmultiplikation entstehenden Glieder nicht beseitigt werden. Denn die Mengen $M_q + N_n$ ($n = 1, 2, \dots$), die mit E_q bezeichnet werden sollen, lägen ja alle bis auf eine endliche Anzahl, etwa E_1, \dots, E_Q , vollständig rechts von $F^* + 1$, und von den Mengen E_1, \dots, E_Q hätte ja nur die eine Menge E_1 eine Häufungsstelle in F^* .

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 9.

RADIOMETER FORCE AND
DIMENSIONS OF APPARATUS. II.

BY

RASMUS E. H. RASMUSSEN



KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Summary.

Some measurements of the radiometer force on platinum bands of various widths are described. The bands were placed in a large container; the measurements were carried out at various pressures of hydrogen and dry atmospheric air.

R_1 being the radiometer force per cm of the platinum band, and T_1 the difference in temperature between the platinum band and the container, it is shown that.

At low pressures $\frac{R_1}{T_1}$ is proportional to the width B of the band, in agreement with Professor KNUDSEN's theory and with other measurements.

At high pressures $\frac{R_1}{T_1}$ decreases rapidly with increasing B .

The maximum value of $\frac{R_1}{T_1}$ is but slightly dependent on B ; but the pressure p_m at which $\frac{R_1}{T_1}$ is maximum is about inversely proportional to B .

An empirical formula of the results is given.

On a platinum band 1 cm wide placed in a narrow tube with a rectangular section radiometer forces are measured which are about 5 times greater than those on a band of the same width placed in the large container.

As a supplement to investigations previously described¹ concerning the dependency of the radiometer force on the dimensions of the apparatus, a series of measurements were made of the radiometer force on platinum bands of various widths.

The measurements were carried out with the torsion balance described by Professor KNUDSEN² which was pro-

¹ V. S. math.-fys. Medd. XI. 9.

² V. S. math.-fys. Medd. XI. 1.

vided with a thicker suspension wire of Wolfram, the torsion moment of which was found by oscillation experiments to be

$$D = 109,2 \frac{\text{Dyn} \cdot \text{cm}}{\text{Radian}}$$

The wire was about 100μ thick, its length was 10,6 cm.

First, measurements were made of the radiometer force on a couple of bands of a width of $1/4$ cm; then these were replaced by a couple of bands $1/2$ cm wide, and the radiometer force on them was measured, and finally measurements were made with a pair of bands 1 cm wide.

All dimensions were carefully measured for every pair of platinum bands.

The angle of deflection was measured with a telescope and a scale with 100,0 cm scale distance.

If the radiometer force per 1 cm of the length of the band be called R_1 and the deflection α cm (reduced to angular measure), then for the three different pairs of bands

$$\begin{array}{ll} R = \alpha \cdot 0,00399 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}} & B = 0,253 \text{ cm} \\ R = \alpha \cdot 0,00410 \text{ »} & B = 0,502 \text{ »} \\ R = \alpha \cdot 0,00431 \text{ »} & B = 1,001 \text{ »} \end{array}$$

B = the mean value of the widths of the two bands. Thus, of the bands $1/2$ cm wide, one was 0,5036 cm and the other 0,4994 cm wide.

After having been soldered to the torsion balance, one side of the bands was blackened with platinum black; this blackening was in each case done in the same way (with the same solution of platinum chloride, the same density of current, in the same time), so as to make the black surfaces as equal as possible.

The temperature of the platinum bands was determined during the measurements by their electric resistance.

The temperature of the container was read on a thermometer placed on the glass cover.

In the following T_1 denotes the temperature difference $T - T_0$, where T is the absolute temperature of the platinum bands and T_0 that of the container, which is about room temperature.

Results of the Measurements.

The radiometer force was measured at different pressures p Dyn/cm² of hydrogen and of dry atmospheric air.

The tables below give $10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1}$ for the pressures p and for various values of T_1 , the approximate value only of T_1 being tabulated.

In figs. 1 and 2, $\frac{R_1}{T_1}$ is presented graphically as a function of $\log p$.

The plotted values of $\frac{R_1}{T_1}$ are all valid for $T_1 = 40^\circ$. Where measurements at this temperature difference were not available, the value of $\frac{R_1}{T_1}$ was found by an interpolation (or in some few cases by a slight extrapolation). This can be done with sufficient exactitude, since $\frac{R_1}{T_1}$ only varies slightly with T_1 . The accuracy of the measurements is essentially less for the measurements in atmospheric air than for the measurements in hydrogen, because the radiometer forces are very small in atmospheric air; the deflections read on the scale were all less than 3 cm.

In the hydrogen measurements the deflections were as a rule 20—30 cm.

The relative accuracy of the measurements is certainly least for the measurements with the widest bands.

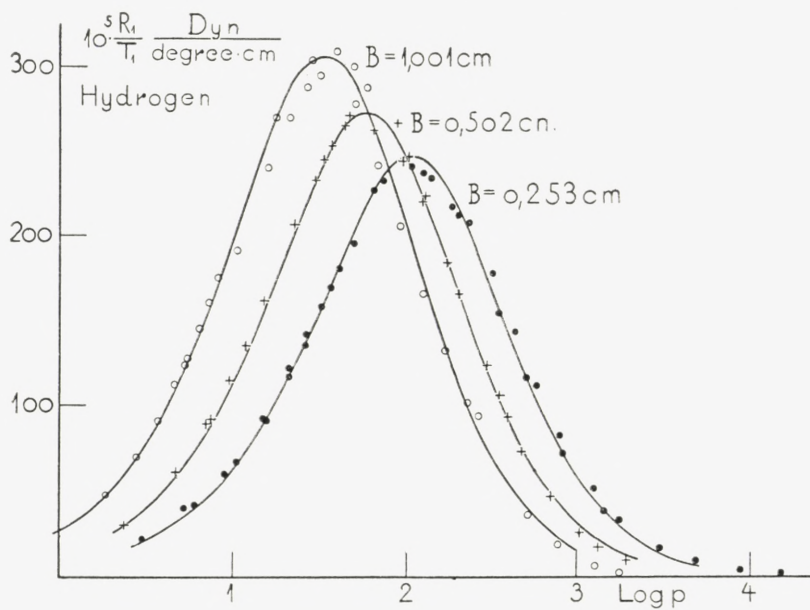


Fig. 1.

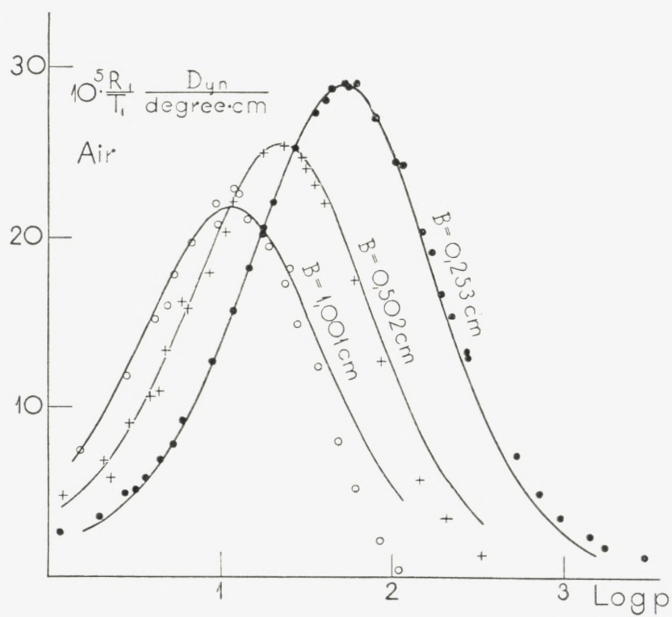


Fig. 2.

This is due to the great loss of heat from the wide bands, owing to which a fairly stable condition of heat conduction cannot be achieved, and for that reason there is some uncertainty in the determination both of the radiometer force and of the temperature of the band. In addition to accidental errors there are some of a systematic nature, which are of special importance for the measurements in atmospheric air, but are without any great influence on the measurements in hydrogen. The first of these errors is due to the imperfect vacuum. From various

$$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1} \text{ in hydrogen, } B = 0,253 \text{ cm.}$$

<i>p</i>	50°	92°	143°	<i>p</i>	19°	29°	50°
14390	2,1	2,1	2,4	318	161	172	182
8590	3,9	4,4	5,1	236	188	201	212
4654	8,9	10,3	12,3		19°	29°	40°
2872	16,5	19,4	22,8				
1715	32,8	37,9	44,0	107,7	231	238	240
1235	51,5	55,1	63,8	139,7	226	231	233
				199,0	204	209	211
	29°	50°	92°	64,6	225	225	226
779	79,0	86,2	95,4	125,9	231	234	236
578	107,4	115,4	125,3	183,8	214	215	216
429	138	148	154	347	149	152	154
5,24	39,9	39,8	38,8	499	112,5	115,6	118,1
10,46	66,5	66,3	62,1	814	68,1	70,6	72,7
15,64	91,0	91,1	88,0	1408	36,4	37,9	38,9
20,81	116,7	116,4	112,4	3,08			21,8
26,0	134	136	136	6,09			41,7
36,2	169	169	169	9,07			59,9
38,2	183	182		14,96			92,2
73,9	232	231		20,84			122,2
				26,6			141,2
				32,4			158
				41,0			180
				49,6			195

$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1}$ in hydrogen, $B = 0,502$ cm.

p	32°	62°	p	32°	43°	p	32°	43°
2,39	27,5	31,7	45,9	273	265	94,2	245	241
4,72	62,3	59,3	89,2	270	262	122,4	219	219
7,04	89,4	89,6	130,4	223	223	345	106	107
9,35	116,0	112,6	169,3	191	195	676	45,9	47,6
11,63	136,5	133,6	102	257	253	993	25,7	26,8
7,49	89,8	93,5	199	174,5	175,5	1298	16,9	17,5
14,89	163,7	157,7	292	123,3	123,4	1873	9,5	9,2
22,28	211	201	379	92,3	93,3			
			463	73,3	73,5		32°	47°
			33,1	242	245	29,6	232	232
			64,5	263	258	36,9	255	248
						44,2	264	264

$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1}$ in hydrogen, $B = 1,001$ cm.

p	33°	43°	p	33°	43°	p	43°
5,46	118	110	227	101	102	0,98	25
10,82	199	183	169	133	132	1,91	48
16,16	242	238	125	164	166	2,84	70
21,47	272	266	93	205	206	3,76	91
26,8	290	284	69	246	241	4,67	113
32,1	296	292	51	279	275	5,59	128
17,9	267	271	263	95	95	6,49	145
29,2	306	301	514	37	37	7,40	161
39,8	310	306	755	20	20	8,30	175
49,9	301	297	1260	8	8		
59,5	288	285	1747	4	4		

causes, amongst others the giving off of adsorbed air, the apparatus could not be exhausted to any high vacuum; owing to the residue of air a final value $R_{1 \text{ vac}}$ of the radiometer force is found by measuring in »vacuum«.

$$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1} \text{ in atmospheric air, } B = 0,253 \text{ cm.}$$

p	40°	50°	p	40°	50°	p	40°	50°	p	40°	50°
3,26	5,1	5,3	34,6	27,4	27,9	53,2	28,9	28,6	2950	1,2	1,1
6,10	9,2	9,3	43,1	28,8	29,2	103,4	24,5	25,8			
8,93	12,7	12,7	51,6	29,1	29,2	151	20,4	20,6	1,18	2,6	2,5
11,75	15,7	16,0	60,1	29,1	29,9	196	16,7	17,5	2,02	3,5	3,7
14,56	18,2	18,4	40,0	28,1	28,2	273	13,4	13,7	2,86	4,9	4,8
17,35	20,2	20,8	77,8	27,1	27,5	534	7,2	7,2	3,69	5,8	5,8
20,04	22,1	22,3	113,4	24,3	24,3	729	4,9	5,0	4,52	6,9	6,9
8,89	12,8	13,0	170,7	19,2	19,7	1436	2,4	2,5	5,35	7,8	8,0
17,42	20,6	20,7	226	15,4	16,1	965	3,5	3,6			
26,1	25,3	25,5	279	13,0	13,2	1754	1,8	1,7			

$$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1} \text{ in atmospheric air, } B = 0,502 \text{ cm.}$$

p	31°	61°	p	31°	61°	p	31°	61°	p	31°	61°
5,99	16,1	16,3	40,0	21,4	23,3	339	1,3	1,4	1,24	4,6	4,8
11,73	22,0	22,2	30,8	23,2	26,0	2,34	4,8	7,8	2,14	6,8	6,8
17,44	25,0	25,1	59,7	16,6	19,3	4,42	10,2	12,3	3,04	9,0	9,1
23,13	24,8	26,5	87,0	11,7	14,7	6,48	16,0	15,4	3,94	10,5	10,8
28,8	24,0	26,1	147,7	4,9	7,3	8,54	17,8	18,1	4,83	13,4	13,0
34,4	21,9	25,4	205	3,2	4,0	10,59	20,1	20,8			

$$10^5 \cdot \frac{R_1}{T_1} \text{ in atmospheric air, } B = 1,001 \text{ cm.}$$

p	33°	43°	p	33°	43°	p	33°	43°	p	33°	43°
4,94	15,9	16,1	27,9	14,1	15,2	61,4	4,8	5,4	4,16	14,9	15,3
9,58	20,5	20,9	12,6	22,2	22,8	85,5	1,7	2,2	5,45	17,5	17,9
14,20	20,7	21,3	24,9	17,4	18,5	109	0,2	0,5	6,74	19,3	19,9
18,8	18,9	19,7	37,1	11,7	12,7	1,57	7,1	7,5	9,28	21,6	22,2
23,4	16,7	17,5	49,3	7,4	8,3	2,87	11,6	11,9	11,82	22,2	23,2

As it is not known of what gases the residual air consists the residual pressure p_r cannot be calculated from the measured $R_{1\text{ vac}}$; but its air- or hydrogen-equivalent can be calculated, i. e. the pressure p_L of atmospheric air, or p_H of hydrogen, which would give the same radiometer force.

Professor KNUDSEN'S formula for the radiometer force at low pressures¹ may be written

$$(1) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T_0} \cdot B \cdot (a' - a'')$$

for small values of T_1 . From this is found

$$p_L = \frac{R_{1\text{ vac}}}{T_1} \cdot \frac{4 \cdot T_0}{B(a' - a'')_L},$$

where $(a' - a'')_L$ denotes the difference between the coefficients of accommodation for the two sides of the band proportionate to air. It is here put = 0,08 and need not be known with any great exactitude.

If after an exhaustion of the apparatus $R_{1\text{ vac}}$ has been measured, and then by means of the pipette system as much dry atmospheric air has been introduced as gives the pressure p^1 , the corrected value for the pressure in the apparatus is

$$p = p^1 + p_L.$$

The tabulated air pressures are all corrected in this way. The magnitude of the correction p_L in all cases lies between 0,2 and 0,4 Dyn/cm² and is thus only of importance for the measurements at low pressures.

For the hydrogen measurements the corresponding cor-

¹ V. S. math. fys. Medd. XI, 1. p. 23.

rections of the pressure p_H are much smaller, at most $0,07 \text{ Dyn/cm}^2$; in their calculation $(\alpha' - \alpha'')_H = 0,32$ was employed.

Another error relates to the measurements of the deflection.

The measurements were carried out in the following way. The heating current i_1 was first sent through the platinum band in an arbitrary direction and the deflection α thus produced was read. Then the current i_1 was reversed and α again read, and the mean value of the two readings of α was used.

The object of this is to eliminate the influence of the earth's magnetic field, which was, however, reduced as much as possible by the appropriate placing of a permanent magnet.

But the method fails in the case of the magnetic field which is due to the current i_1 in the conducting wires to the swinging system; the effect of the latter may become appreciable for large values of i_1 .

The effect of the magnetic field of the conducting wires is evidently independent of the direction of the current, and with the arrangement employed it was opposite to the direction of the radiometer force.

For large values of i_1 , which occur especially in measurements with the broad bands and at high pressures of air and hydrogen, α will thus be too small.

The correction for α is determined by the introduction of so high an air pressure in the apparatus that the radiometer force may be regarded as negligible, after which the negative deflection α_m is measured which is produced when a current i_1 of suitable strength is sent through the swinging system.

Since α_m must be proportional to i_1^2 we may put $\alpha_m = k \cdot i_1^2$, where k is a constant.

The mean value of several measurements at $1/2$ —1 cm air pressure was found to be $k = 0,035$. This value was in satisfactory agreement with an estimated value of the effect of the field.

The positive correction $k \cdot i^2$ should, then, be added to the read values of the deflection α . The corrections are generally small and are only of importance for the measurements at the highest pressures, and more especially for the measurements with atmospheric air where the radio-meter forces are small.

Discussion.

From figures 1 and 2, where the ordinate scale in fig. 1 is 10 times smaller than that in fig. 2, it will appear that the quantity $\frac{R_1}{T_1}$ in hydrogen is generally about 10 times larger than in atmospheric air.

Further $\frac{R_1}{T_1}$ at low pressures of hydrogen is fairly accurately proportional to the width of the band B , which agrees with Professor KNUDSEN's theory and with previous experience.

At low pressures of atmospheric air $\frac{R_1}{T_1}$ does not seem to increase as rapidly as B ; but this is presumably due to the fact that it has not been possible to make the measurements at sufficiently low pressures.

At high pressures $\frac{R_1}{T_1}$ decreases rapidly with increasing B , and within a certain range of pressures is very nearly inversely proportional to B . Here, then, there is no question of an edge effect.

The maximum value $\frac{R_{1m}}{T_1}$ is only slightly dependent on B ; when B increases from 0,25 to 1 cm, i. e. becomes 4 times as great, $\frac{R_{1m}}{T_1 \text{ hydrogen}}$ rises in the ratio $\frac{304}{247} = 1,24$, and $\frac{R_{1m}}{T_1 \text{ air}}$ decreases in the ratio $\frac{22}{29} = 0,76$.

The pressure p_m at which the maximum radiometer force $\frac{R_{1m}}{T_1}$ occurs is about inversely proportional to B .

The following table gives the graphically determined values of $\frac{R_{1m}}{T_1}$ and p_m .

	B	$10^5 \cdot \frac{R_{1m}}{T_1}$	p_m	$a' - a''$	c
Hydrogen	0,253	247	107	0,314	0,401
	0,502	272	59	0,316	0,368
	1,001	304	33	0,316	0,329
Air	0,253	29,2	51	0,078	0,456
	0,502	25,8	22,4	0,079	0,532
	1,001	21,9	11,5	0,065	0,509

An empirical formula of the results is given in the expression

$$(2) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\frac{1}{4}(a' - a'') \cdot \frac{B}{T_0} \cdot p}{1 + c \cdot \frac{B}{\lambda_1} \cdot p + \left(c \cdot \frac{B}{\lambda_1} \cdot p\right)^2 + \left(\frac{1}{3} c \cdot \frac{B}{\lambda_1} \cdot p\right)^3}$$

which for low pressures agrees with Professor KNUDSEN'S above-mentioned formula, and which is obtained from a previously employed interpolation formula by regarding the container as being infinitely great¹. Owing to dimensional considerations it was expected that the constant c , which,

¹ V. S. math.-fys. Medd. XI 9, p. 16.

like $a' - a''$, is a pure number, should be independent of B and λ_1 , when the container is of infinite dimensions.

The constants $a' - a''$ and c are most readily determined by means of the values of $\frac{R_{1m}}{T_1}$ and p_m ; by differentiation of (2) we find

$$a' - a'' = \frac{11,73 R_{1m} \cdot T_0}{B \cdot p_m \cdot T_1} \quad \text{and} \quad c = 0,9660 \cdot \frac{\lambda_1}{B \cdot p_m}.$$

In the table of $\frac{R_{1m}}{T}$ and p_m the values thus calculated of $a' - a''$ and c , are also given, λ_1 the mean free path at the pressure 1 Dyn/cm² being put = 11,23 cm in hydrogen and = 6,08 cm in air.

As will be seen, the values of c vary somewhat both with B and λ_1 .

This variation may partly be due to the fact that the above-mentioned condition of the infinite dimensions of the container is not fulfilled (the diameter of the container was c. 23 cm); but the fact that, with increasing values of B , c decreases in hydrogen and increases in atmospheric air can hardly be explained by the geometric conditions alone.

The full-drawn curves in figs. 1 and 2 are calculated from formula (2) with the given values of the constants. T_0 is put = 293°.

As will appear, the measurements in hydrogen are presented with good approximation, whereas the curves do not agree so well with the measurements in air, notably at high pressures. But on account of the rather marked inaccuracy of these measurements no further inferences should be drawn from this lack of agreement.

In order to investigate the effect of changes in the dimensions of the container, a series of measurements were

made of the radiometer force on a platinum band 1 cm wide which was surrounded by a vertical brass tube, the transverse section of which was rectangular; its internal dimensions were 3,2 cm and 1,48 cm, so that the distance from the edges of the platinum band to the wall of the tube was only about 2,4 mm, i. e. $\frac{1}{4}$ of the width of the band.

Fig. 3 shows a horizontal section of the apparatus. *P* is the platinum band, *M* the brass tube, and *G* the glass cylinder in which the whole apparatus is enclosed; the arrangement is otherwise exactly as previously described¹.

The platinum band was 14,83 cm long and 0,999 cm wide; it was blackened with platinum black on one side in the same way as the other platinum bands.



Fig. 3.

Opposite the middle of the band a hole was drilled through the brass tube, through which the edge of the band could be observed through a microscope.

The measurement of the radiometer force was carried out by the magnetic compensation method described by Professor KNUDSEN².

The results of the measurements are given in the table below, and are presented graphically for $T_1 = 80^\circ$ in fig. 4, the ordinate scale of which is about 5 times smaller than the ordinate scale in fig. 1. Thus the radiometer forces are about 5 times as great.

As regards the accuracy of measurement it must be noted that it is rather small for high pressures, for the reason already mentioned (great loss of heat, no stable

¹ V. S. math.-fys. Medd. XI, 9, p. 3.

² V. S. math.-fys. Medd. XI, 1, p. 32—34.

$10^4 \cdot \frac{R_1}{T_1}$ in hydrogen.

p	40°	80°	120°	p	80°
50,0	99	87	86	2,75	8,4
97,4	144	119	123	5,48	16,2
142,4	151	134	135	8,21	24,6
301	132	122	125	10,92	29,2
452	109	96	111	13,62	35,3
596	90	89	95	16,31	41,1
3460	36	26	30	19,00	46,3
1950	56	40	43	21,66	50,6
964	73	58	63		
715	82	66	79	5,25	11,8
				10,49	27,5
38,2	80	75	71	15,70	39,4
73,9	111	113	107	20,9	48,3
107,7	131	130	123	26,1	56,6
139,7	135	136	131	31,2	62,9
199	167	154	140	36,3	71,0
64,6	119	114	99		
125,9	156	141	128		
183,8	153	142	131		
347	133	122	117		
499	95	100	100		
814	80	68	78		

conduction of heat); at low pressures it is appreciably greater.

The maximum values are

$$\frac{R_{1m}}{T_1} = 147 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Dyn}}{\text{cm degree}}, \quad p_m = 166 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2}.$$

The results may in this case be represented by a symmetrical radiometer curve

$$(4) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\frac{1}{4} (a' - a'') \frac{B}{T_0} \cdot p}{1 + bp + (bp)^2},$$

which is obtained from (2) by omitting the 3rd degree term of the denominator and putting $c \cdot \frac{B}{\lambda_1} = b$. The constants are determined by $a' - a'' = \frac{12 \cdot R_{1m} \cdot T_0}{B \cdot p_m \cdot T_1}$ and $b = \frac{1}{p_m}$, which gives $a' - a'' = 0,314$, $b = \frac{1}{166}$.

The full-drawn curve in fig. 4 was calculated from (4)

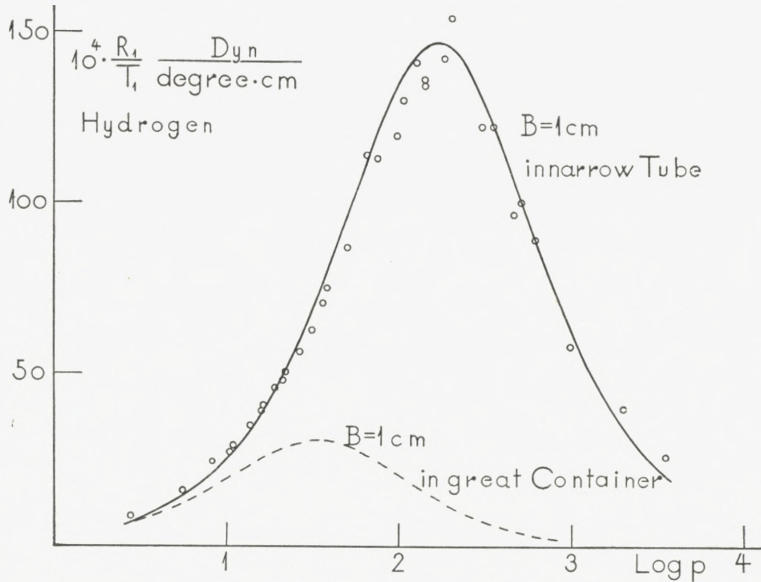


Fig. 4.

with these constants. In the same figure the radiometer curve for the widest band $B = 1,001$ cm in the large container is given (in a dotted line) for comparison.

The author desires to thank Professor KNUDSEN for excellent working conditions and for his constant interest in the work, and likewise tenders thanks to the trustees of »Emil Herborgs Legat« for a grant of funds.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 10.

DIE PRIMZAHLEN IN DER THEORIE
DER ELLIPTISCHEN MODUL-
FUNKTIONEN

VON

E. HECKE



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In der Theorie der elliptischen Modulfunktionen sind die Elemente, aus denen man durch Quotientenbildung alle Funktionen herstellen kann, bekanntlich die sog. ganzen Modulformen. Das sind Funktionen der komplexen Variablen τ , welche sich bei den Substitutionen der Modulgruppe ähnlich wie die Eisensteinschen Reihen g_2, g_3 aus der Weierstrasschen Theorie verhalten:

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k F(\tau),$$

wenn a, b, c, d ganze Zahlen mit Determinante 1 sind. Die Zahl $-k$ heisst die Dimension von F . Bei homogener Schreibweise erhält man in

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

eine homogene Funktion von ω_1, ω_2 , welche sich bei homogenen Modulsstitutionen absolut invariant verhält. k ist im allgemeinen eine positive ganze Zahl; jedoch ist man genötigt, von den Thetafunktionen her auch halbzahlige Dimensionen zuzulassen, wo alsdann aber durch die Mehrdeutigkeit der Quadratwurzel $\sqrt{c\tau + d}$ gewisse Schwierigkeiten auftreten. Die Modulform heisst ganz, wenn sie im Innern der oberen Halbebene regulär ist, und dort eine Fourier-Entwicklung

$$F(\tau) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (z = e^{2\pi i\tau})$$

hat. Ist $c_0 = 0$, so nennt man die Funktion $F(\tau)$ im Punkte $\tau = \infty$ (und in den rationalen Punkten τ) verschwindend.

Mit entsprechender Modifikation übertragen sich diese Begriffe auf den Fall, dass man die Invarianz nicht bei der vollen Modulgruppe, sondern nur bei Untergruppen verlangt, wo die Koeffizienten a, b, c, d Kongruenzbedingungen nach einem festen Modul q genügen. Man spricht dann von Formen der »Stufe q «.

Die Formen gegebener Dimension und Stufe bilden eine lineare Schar mit endlich vielen Erzeugenden. Für die Stufe 1, d. h. die volle Modulgruppe, haben wir einen genauen Ueberblick. Es gibt solche Formen nur von gerader Dimension $-k$ und $k \geq 4$; und sie lassen sich alle als Polynome in den beiden Grundformen g_2, g_3 mit konstanten Koeffizienten darstellen. Einen besseren Ueberblick gewinnt man durch Einführung der allgemeinen Eisenstein-Reihen

$$G_k(\tau) = \sum_{m, n} \frac{1}{(m\tau + n)^k}.$$

Hier durchläuft m, n alle ganzen Zahlenpaare ausser $(0,0)$. Die Reihen sind für $k \geq 4$ absolut konvergent, woraus sogleich die Invarianzeigenschaft folgt. G_4, G_6 sind bis auf Zahlfactoren mit g_2, g_3 identisch.

Für $k < 12$ gibt es keine bei $\tau = \infty$ verschwindende Modulform der Dimension $-k$. Für $k = 12$ tritt die Diskriminante Δ auf, eine Form der Dimension -12

$$\Delta(\tau) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{24},$$

welche bei $\tau = \infty$ in erster Ordnung verschwindet. Und dann ergibt sich eine eindeutige Normaldarstellung aller ganzen Modulformen der Dimension $-k$ in folgender Gestalt:

$$F(\tau) = x_0 G_k + x_1 A G_{k-12} + \dots = \sum_{n=0}^{\frac{k}{12}} x_n A^n G_{k-12n}$$

($G_2 = 0, G_0 = 1$ gesetzt)

mit von τ unabhängigen x_n , wobei n die ganzen Zahlen ≥ 0 durchläuft, wofür $k - 12n \geq 0$. Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formen der Dimension $-k$ ist danach elementar zu berechnen. Auch für höhere Stufen q ist bei $k \geq 2$ diese Anzahl bekannt. Dabei tritt das Geschlecht der betreffenden Untergruppe $\Gamma(q)$ auf. Die Aufstellung aller Formen durch Angabe analytischer Ausdrücke ist aber bei höheren Stufen bisher noch nicht gelungen, ausser für einige kleinere Werte von q . Einige Formen gewinnt man aus den Eisenstein-Reihen G_k (durch Hinzufügung von Kongruenzbedingungen für die Summationsbuchstaben m, n). Einige weitere Formen gewinnt man aus Thetas. Ist nämlich $Q(x_1, \dots, x_{2k})$ eine positiv definite quadratische Form von $2k$ Variablen mit ganzen rationalen Koeffizienten, so stellt die $2k$ -fache Thetareihe

$$\sum_{n_1, \dots, n_{2k}} e^{2\pi i \tau Q(n_1, \dots, n_{2k})}$$

eine ganze Modulform der Dimension $-k$ dar von einer Stufe, welche mit der Determinante von Q zusammenhängt.

Wenn man sich nun allgemein für die Reihenentwicklungen nach z interessiert, so findet man zunächst für die G_k ein einfaches Koeffizientengesetz:

$$G_k(\tau) = \alpha_k + \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} z^n.$$

Dabei sind α_k, β_k von z unabhängige Grössen (mit rationalem Verhältnis)

$$\alpha_k = 2\zeta(k); \quad c_n^{(k)} = \sum_{d|n} d^{k-1}$$

ist die Summe der $(k-1)$ -ten Potenzen der Teiler von n . Die $c_n^{(k)}$ hängen also mit den multiplikativen Eigenschaften von n zusammen, und es liegt nahe, zum Vergleich die Dirichlet-Reihen mit den Koeffizienten c_n^k heranzuziehen. Wir wollen allgemein jeder Modulform der Dimension $-k$ und der Stufe 1

$$F(\tau) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \quad (s = \sigma + it)$$

(also ohne Rücksicht auf das konstante Glied c_0 !) zuordnen. Es gelten dann folgende leicht beweisbare Sätze:

I) $\varphi(s)$ ist absolut konvergent in der Halbebene $\sigma > k$.

II) $\varphi(s)$ ist eine ganze transzendente Funktion, wenn $c_0 = 0$; ist aber $c_0 \neq 0$, so hat $\varphi(s)$ bei $s = k$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum c_0 , und $(s-k)\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion.

III) $\varphi(s)$ genügt folgender Funktionalgleichung: Setzt man

$$R(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s),$$

so ist

$$R(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} R(k-s).$$

IV) $(s-k)\varphi(s)$ hat endliches Geschlecht.

Aber auch umgekehrt zeigt sich durch die bekannte Mellinsche Formel: Ist $\varphi(s)$ eine Dirichlet-Reihe mit den Eigenschaften I)–IV) so ist die zugehörige Potenzreihe $F(\tau)$ (mit c_0 als Residuum von $\varphi(s)$ bei $s = k$) eine ganze Modulform der Dimension $-k$. Die Anzahl der linear unab-

hängigen Lösungen dieser Funktionalgleichung ist also endlich und gleich der Anzahl der ganzen Modulformen der Dimension $-k$.

Aehnliche Sätze gelten für höhere Stufen; nur muss man dann im allgemeinen *Systeme* von endlich vielen Funktionen $\varphi(s)$ betrachten, die einem *System* von Funktionalgleichungen genügen. Nimmt man für $F(\tau)$ die einfachste Thetareihe $\mathcal{J}_{00}(\tau)$, so kommt für $\varphi(s)$ bei passender Normierung bekanntlich das Riemannsche $\zeta(2s)$ heraus. Von hier aus sieht man, in welcher Richtung geeignete Verallgemeinerungen des bekannten Hamburgerschen Satzes über die Bestimmung von $\zeta(s)$ aus der Funktionalgleichung liegen.

Nun zeigen die bisher bekannten Beispiele, dass bei niederen Werten von k und der Stufe q fast alle Modulformen ein Koeffizientengesetz haben, das mit den multiplikativen Eigenschaften von n zusammenhängt. Genauer gesagt: Die linearen Formenscharen lassen sich durch Formen mit einem Koeffizientengesetz erzeugen, welches sich besonders einfach für die zugehörigen Dirichlet-Reihen ausspricht. Diese Dirichlet-Reihen besitzen nämlich eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt

$$\varphi(s) = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + a_p p^{-2s})^{-1}.$$

Das Produkt ist über alle Primzahlen p zu erstrecken, c_p und a_p sind nur von p abhängig. Das trifft zunächst für die G_k zu, wo $c_p = 1 + p^{k-1}$ $a_p = p^{k-1}$. Ferner für die Dimension -1 , wo man binäre Thetareihen hat; die Dirichlet-Reihen sind die Zetafunktionen gewisser imaginärquadratischer Körper, gebildet mit Klassencharakteren und Restcharakteren, für andere Dimension kommen solche Zetafunktionen mit Größencharakteren hinzu. Für die Dimension

$-\frac{1}{2}$ kommt $\zeta(2s)$ bzw. die Funktion $L(2s, \chi)$ mit Charakteren nach der Stufe als Modul heraus; ähnliches gilt auch für die besonders wichtigen Wurzeln $\sqrt[n]{\mathcal{A}(\tau)}$, mit $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Dies ist vorläufig eine sehr unvollständige Menge von Tatsachen ohne erkennbaren Zusammenhang.

Es zeigt sich jedoch, dass hier eine allgemeine Gesetzmässigkeit vorliegt, welche einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Primzahlen und den Modulfunktionen herstellt. Im einfachsten und bisher wichtigsten Falle zeigt dieser sich in der Möglichkeit der Reduktion des Riemannschen $\zeta(2s)$ auf die Thetareihe. Es geht daraus hervor, dass die elliptischen Modulfunktionen in einer besonders zugänglichen Art den Zusammenhang zwischen additiven und multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen vermitteln.

Das Hilfsmittel der Untersuchung ist ein linearer Funktionalprozess, der aus der klassischen Theorie wohlbekannt ist (Transformationstheorie, Hurwitzsche Theorie der Modularkorrespondenzen), der aber in dieser Richtung noch nicht untersucht wurde. *Ich gebe im Folgenden für den einfachsten Fall der ganzen Modulformen ganzer Dimension $-k$ und Stufe 1 einen Ueberblick über die Methoden und Resultate.*

Es sei also k eine gerade Zahl ≥ 4 , und $\varkappa = \left[\frac{k}{12} \right]$ bzw. $\varkappa = 1 + \left[\frac{k}{12} \right]$ sei die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Modulformen der Dimension $-k$; $F^{(\varrho)}(\tau)$, $\varrho = 1, \dots, \varkappa$ sei ein volles System solcher Formen. Für jede natürliche Zahl n ist dann bekanntlich $F^{(\varrho)}(n\tau)$ ebenfalls eine ganze Modulform, die aber nicht zur vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ gehört, sondern zu der Untergruppe $\Gamma_0(n)$ mit $c \equiv 0 \pmod{n}$.

Aehnliches gilt für $F^{(\rho)}\left(\frac{A\tau + B}{C\tau + D}\right)$, wenn A, B, C, D irgendwelche ganzen Zahlen mit Determinante n sind. Diese Transformationen der Ordnung n zerfallen bekanntlich in endlich viele Klassen nach $\Gamma(1)$. Elemente derselben Klasse unterscheiden sich nur um einen vorderen Faktor aus $\Gamma(1)$, heissen äquivalent nach $\Gamma(1)$; verschiedene Klassen enthalten nie äquivalente Elemente. Jede symmetrische Verbindung der homogen geschriebenen $F^{(\rho)}(L(\omega_1, \omega_2))$, wo L die verschiedenen Klassen durchläuft, z. B. die Summe, bleibt bei $\Gamma(1)$ invariant. Als Repräsentanten der Klassen kann man wählen

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad ad = n; \quad b \bmod d, \quad d > 0.$$

(Es ist zweckmässig, hierbei auch Systeme a, b, c, d , mitzurechnen, welche einen gemeinsamen Teiler > 1 haben). Somit ergibt sich schliesslich: Bei jeder Modulform F werde gesetzt für eine natürliche Zahl n

$$(1) \quad T_n(F) = n^{k-1} \sum_{a, b, d} F\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}.$$

Dann ist $T_n(F)$ wieder eine ganze Modulform der Dimension $-k$, wenn F eine solche ist. Der lineare Operator T_n führt also die lineare Schar der $F^{(\rho)}(\tau)$ in sich über, es gibt also n^2 von τ unabhängige Grössen $\lambda_{\rho\sigma}(n)$, sodass

$$T_n(F^{(\rho)}(\tau)) = \sum_{\sigma=1}^n \lambda_{\rho\sigma}(n) F^{(\sigma)}(\tau).$$

Die quadratische Matrix $\lambda(n)$ mit den Elementen $\lambda_{\rho\sigma}(n)$ hat nun folgende Eigenschaften:

1) Die Matrizen $\lambda(n)$ für $n = 1, 2, \dots$ sind untereinander vertauschbar.

2) Es gilt

$$(2) \quad \lambda(n) \cdot \lambda(m) = \sum_{d|m, d|n} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^{k-1}$$

für zwei beliebige natürliche Zahlen m, n . In der Summe durchläuft d die gemeinsamen Teiler von m, n . Insbesondere ist für teilerfremde m, n

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \lambda(n \cdot m).$$

3) Geht man von $F^{(\varrho)}(\tau)$ durch eine lineare Substitution A zu einem linear äquivalenten System

$$F^{*(\varrho)}(\tau) = \sum_{\sigma=1}^z a_{\varrho\sigma} F^{(\sigma)}(\tau), \quad A = (a_{\varrho\sigma})$$

über, so sind die zu dem System F^* gehörigen Matrizen

$$\lambda^*(n) = A \cdot \lambda(n) \cdot A^{-1}$$

(dass Produkt ist hierbei wie in (2) als Matrizenprodukt gemeint).

4) Setzt man jetzt für $F^{(\varrho)}(\tau)$ die Potenzentwicklung

$$F^{(\varrho)}(\tau) = a^{(\varrho)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a^{(\varrho)}(n) z^n$$

in $T_n(F^{(\varrho)})$ ein, so erhält man ein System von Gleichungen zwischen $a^{(\varrho)}(n)$ und den $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$:

$$(3) \quad \sum_{d|n, d|m} a^{(\varrho)}\left(\frac{nm}{d^2}\right) d^{k-1} = \sum_{\sigma=1}^z \lambda_{\varrho\sigma}(n) a^{(\sigma)}(m). \quad \begin{matrix} n \geq 1 \\ m \geq 0 \end{matrix}$$

Hieraus folgt unter Benutzung des Umstandes, dass die linke Seite in n, m symmetrisch ist, dass die z^2 Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = \lambda_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\varrho\sigma}(n) z^n, \quad \varrho, \sigma = 1, \dots, z$$

unter geeigneter Definition der konstanten Matrix $\lambda(0)$ selbst der linearen Schar der $F^{(\rho)}(\tau)$ angehören und umgekehrt:

$$f_{\rho\sigma}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\rho\sigma}^{\nu} F^{(\nu)}(\tau); \quad F^{(\rho)}(\tau) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\rho\sigma}^{\nu}(\tau) a^{(\sigma)}(1)$$

wo die $b_{\rho\sigma}^{\nu}$ von τ unabhängig sind. Es ist also zweckmässig, die quadratische Matrix

$$B(\tau) = (f_{\rho\sigma}(\tau)) (\rho, \sigma = 1, \dots, \infty)$$

einzuführen, welche sich mit Hilfe der ∞ konstanten Matrizen

$$B_{\nu} = (b_{\rho\sigma}^{\nu})$$

als

$$B(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F^{(\nu)}(\tau) B_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) e^{2\pi i n \tau}$$

schreiben lässt. $B(\tau)$ ist also eine Zusammenfassung der Schar aller ganzen Modulformen der Dimension $-k$ zu einer Potenzreihe nach z , mit Koeffizienten $\lambda(n)$, die selbst quadratische Matrizen sind, mit dem einfachen Gesetz

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \sum_{d|n, d|m} \lambda\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) d^{k-1} \quad n, m \leq 1.$$

5) Die Matrizen B_{ν} lassen sich als lineare Kombinationen der $\lambda(n)$ mit skalaren Koeffizienten darstellen und umgekehrt:

$$\lambda(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{(\nu)}(n) B_{\nu}; \quad B_{\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\nu}(n) \lambda(n).$$

Die B_{ν} definieren daher einen kommutativen Ring von ∞ linear unabhängigen vertauschbaren Matrizen, dessen Struktur untersucht werden muss.

6) Geht man zu den Dirichlet-Reihen über

$$\varphi_{\rho\sigma}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho\sigma}(n)}{n^s} \quad (\rho, \sigma = 1, \dots, z),$$

so ist die Matrix

$$\Phi(s) = (\varphi_{\rho\sigma}(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

die der $B(\tau)$ zugeordnete Dirichlet-Reihe. Sie gestattet wegen der Vertauschbarkeit der $\lambda(n)$ auf Grund von (2) die Eulersche Produktdarstellung

$$(4) \quad \Phi(s) = \prod_p (\lambda(1) - \lambda(p)p^{-s} + \lambda(1)p^{k-1}p^{-2s})^{-1}.$$

Dabei ist $\lambda(1)$ die Einheitsmatrix und p durchläuft alle Primzahlen, der einzelne Faktor des absolut konvergenten Produktes ist die zu der Klammer reziproke Matrix. Daraus geht hervor, dass die Determinante

$$|\Phi(s)| \neq 0 \quad \text{für } \sigma > k.$$

Es hat also $\Phi(s)$ in der Halbebene $\sigma > k$ eine Reziproke, und die Elemente von $\Phi(s)$ sind bis auf den Pol erster Ordnung $s = k$ überall im Endlichen reguläre Funktionen. Die Matrix genügt auch der Funktionalgleichung

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \Phi(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} (2\pi)^{s-k} \Gamma(k-s) \Phi(k-s).$$

Es ist also hier ein genaues Analogon zu $\zeta(s)$ und dem Nullstellenproblem vorhanden.

7) In den z^2 Elementen der Matrizen $B(\tau)$, $\Phi(s)$ finden sich nur je z linear unabhängige Funktionen von τ oder s ; daher erwächst das Problem, eine solche Normalform herzustellen (durch geeignete Wahl der Ausgangsfunktionen $F^{(\rho)}(\tau)$), in welcher nur z Bestandteile auftreten. Hier gilt zunächst:

Da die Matrizen $\lambda(n)$ vertauschbar sind, kann man sie

bekanntlich simultan durch geeignete Wahl einer festen Matrix A in die Form

$$\lambda^*(n) = A \cdot \lambda(n) \cdot A^{-1}, \quad \lambda_{\rho\sigma}^*(n) = 0 \quad \text{für } \rho > \sigma,$$

überführen, wo die $\lambda^*(n)$ unterhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen haben. Wir nehmen mit Rücksicht auf 3) an, das Ausgangssystem $F^{(\rho)}(\tau)$ sei bereits so gewählt, dass die $\lambda(n)$ selbst diese Gestalt haben. Die gleiche Gestalt haben dann auch $\Phi(s)$, $B(\tau)$. Die in der Diagonale stehenden Elemente

$$\varphi_{\rho\rho}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho\rho}(n)}{n^s} \quad (\rho = 1, \dots, z)$$

haben nun Koeffizienten, die offenbar wegen der Gestalt der $\lambda(n)$ die Regel

$$(5) \quad \lambda_{\rho\rho}(n) \lambda_{\rho\rho}(m) = \sum_{d|n, d|m} \lambda_{\rho\rho}\left(\frac{nm}{d^2}\right) d^{k-1}$$

erfüllen. Mithin haben sie eine gewöhnliche Eulerprodukt-darstellung

$$(6) \quad \varphi_{\rho\rho}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda_{\rho\rho}(p) p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

Das oben erwähnte Nullstellenproblem ist also identisch mit dem Nullstellenproblem der z Funktionen $\varphi_{\rho\rho}(s)$. Von ihnen ist keine identisch 0, und sie sind linear unabhängig, soweit sie verschieden sind. Sind sie wirklich alle verschieden, so haben wir z linear unabhängige $\varphi_{\rho\rho}(s)$ bzw. z linear unabhängige Modulformen $f_{\rho\rho}(\tau)$ mit einem einfachen Koeffizientengesetz; die oberhalb der Diagonale stehenden Elemente sind dann auch von selbst schon 0.

Die Anzahl z' der verschiedenen Funktionen $\varphi_{\rho\rho}(s)$ ist also $\leq z$ und ≥ 1 . Nun ist $z = 1$ für $4 \leq k \leq 10$ und

$k = 14$. Hier ist also $\varkappa' = \varkappa = 1$. Für $k \geq 12$ ergibt sich weiter allgemein $\varkappa' \geq 2$, wenn $k \neq 14$.

8) Es ist nämlich das System aller in $\tau = \infty$ verschwindenden Modulformen der Dimension $-k$ gegenüber T_n invariant, wie aus der Definition von T_n sofort folgt. Andererseits zeigt die Rechnung, dass jede Eisenstein-Reihe G_k (die also bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet) bei T_n sich bis auf einen konstanten Faktor reproduziert. Das bedeutet, dass die Matrix $B(\tau)$ insofern *voll reduzibel* ist, als sie in eine Matrix mit zwei längs der Diagonale aufgereihten quadratischen »Kästchen« transformiert werden kann aus ein bzw. $(\varkappa - 1)^2$ Elementen, während ausserhalb der Kästchen lauter Nullen stehen. Ob die Reduktion auf reine Diagonalform (ausserhalb der Diagonale lauter Nullen) immer möglich ist, kann ich noch nicht entscheiden. Jedenfalls ist für die Dimensionen $-k$ mit $16 \leq k \leq 22$ und $k = 12, 26$, wo $\varkappa = 2$, die Reduzierbarkeit auf reine Diagonalform bewiesen. Also haben die zu

$$A, AG_4, AG_6, AG_8, AG_{10}, AG_{14}$$

gehörigen Dirichlet-Reihen eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt (6); dieses Resultat ist insbesondere für A selbst neu.

Durch eine numerische Rechnung habe ich mich überzeugt, dass auch für $k = 24$, wo $\varkappa = 3$, die Reduktion der zu den drei Formen

$$G_{24}, AG_{12}, A^2$$

gehörigen Matrix $B(\tau)$ auf reine Diagonalform möglich ist. Es gibt ausser G_{24} noch zwei Verbindungen

$$AG_{12} + \alpha A^2, AG_{12} + \beta A^2,$$

deren Dirichlet-Reihen ein Eulerprodukt sind. Hierzu gehört aber A^2 sicher nicht, da hier $c_1 = 0$ ist.

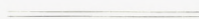
9) Die Frage nach der Reduzibilität oder vollen Reduzibilität von $B(\tau)$ führt also auf die Frage nach den linearen Teilscharen von Modulformen, welche bei den Operationen T_n in sich übergehen, d. h. auf die Eigenfunktionen des Operators T_n , die ja eindeutig bestimmt sind. Auf diese Weise ist zum ersten Male eine charakteristische innere Eigenschaft der Eisenstein-Reihen G_k angebbar, durch welche diese bisher durch Rechenausdrücke eingeführten Formen bestimmt sind: Die G_k sind die bis auf konstanten Faktor eindeutig festgelegten Eigenfunktionen der Operatoren T_n , die bei $\tau = \infty$ nicht verschwinden.

10) Der ganze Ansatz lässt sich nun übertragen auf Formen höherer Stufe q . Es gibt dann zu jedem n nicht nur *einen* Operator T_n , sondern so viel verschiedene, als es mod. q verschiedene Transformationen der Ordnung n gibt. Bei der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den T_n mit gleichen n treten dann naturgemäss die endliche Modulargruppe mod. q und ihre Darstellungen durch lineare Substitutionen auf. Entsprechend sind die Matrizen $\lambda(n)$ alsdann nicht alle vertauschbar, sondern es schieben sich dazwischen die Matrizen der Darstellungen dieser Modulargruppe. Das Schlussresultat ist aber von einer Form ähnlich wie im Falle $q = 1$. Es hat hier ein besonderes arithmetisches Interesse: denn als invariantes Teilsystem von Formen, das bei den Operationen T_n in sich übergeht, tritt hier das System der durch 2 k -fache Thetareihen darstellbaren Formen einer festen Stufe (Dimension $-k$), auf. Und die oben eingeführten Begriffe erlauben die Entwicklung einer vollständigen Theorie der Darstellung ganzer Zahlen durch definite quadratische Formen von gerader Variablenzahl. Das wichtigste Resultat ist, dass auch hier die Darstellung der Zahl N durch die quadratischen Formen eines

vollen Systems mit gegebener Determinante völlig bekannt ist, wenn man die Darstellung der Primzahlen $N = p$ beherrscht. Das analytische Spiegelbild dieser Tatsache ist die Existenz des Eulerproduktes für die entsprechende Matrix aus Dirichlet-Reihen. Es herrschen also ähnliche Gesetze, wie sie bei den binären Formen (imaginär-quadratische Körper) lange bekannt sind, und wie sie für einzelne quadratische Formen von mehr als 2 Variablen schon gelegentlich in der Arithmetik bewiesen wurden. Bei den quadratischen Formen mit ungerader Variablenzahl liefert der obige Ansatz jedoch viel weniger. Die zugehörigen Thetareihen sind Modulformen halbzahliger Dimension und für diese ist der Operator T_n , soweit ich sehe, nur für Quadratzahlen n zu definieren: auf diese Art kommt nur ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Darstellungen von N und von $N \times$ Quadratzahl heraus.

Eine ausführliche Darstellung der ganzen Theorie wird in den Mathematischen Annalen erscheinen.

Hamburg, 3. Mai 1935.



Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 11.

STUDIES
IN MAGNETOCHEMISTRY

PART II.
COMPLEX PLATINUM COMPOUNDS

BY

J. A. CHRISTIANSEN AND R. W. ASMUSSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

The complex platinum compounds which we have investigated in this paper contain divalent platinum as a central ion and four coordinated groups. The substances comprise the following types: — Compounds analogous to the first salt of REISET, the second salt of REISET, PEYRONES compounds, the CLEVE and the COSSA salt and the MAGNUS salts. Furthermore we have investigated the compound $\left[\text{Pt} \begin{matrix} (\text{NH}_3)_4 \\ (\text{NC} \cdot \text{CH}_3)_2 \end{matrix} \right] \text{Cl}_2$, which as far as we know is the only complex compound of divalent platinum which contains 6 coordinated groups. The number of classification¹⁾ of these substances is 84 and for the last-mentioned compound 88. The difference between the atomic number of Radon and the number of classification is respectively 2 and -2 . According to the rule of BOSE these substances therefore might be expected to be paramagnetic; they are, however without exception all diamagnetic. The magnetic moment of the Pt^{++} (μ eff. = 2.8 for spin only) has perfectly disappeared. This fact is of principal interest in connection with the wave-mechanical considerations of PAULING²⁾, who deduced that 4-covalent compounds of Ni, Pd, and Pt should have a planary configuration. A consequence of PAULING's theory is that this configuration involves a diamagnetic susceptibility while the tetrahedral distribution of

¹⁾ J. A. CHRISTIANSEN and R. W. ASMUSSEN: Studies in Magnetochemistry I, Det kgl. danske Vidsk. Selsk. Math.-fys. Medd. XII. 10. 1934.

²⁾ L. PAULING: J. Am. Ch. Soc. **53** 1391. 1931.

the coordinated groups would give a paramagnetic moment. If we had certain chemical evidence for the planary configuration of the 4-covalent platinum complexes, the present work would favour the theory of PAULING. However, the proofs are as a rule not quite decisive, although in some cases the planary arrangement of the valencies seems to be rather definitely proved. In his classical paper on the constitution of inorganic compounds WERNER¹⁾ showed that 4-covalent platinous compounds of the type $\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{X}_2 \\ \text{Y}_2 \end{array} \right]$ occur in two forms, which are chemically different and which he assumed to be cis and trans isomers. S. M. JØRGENSEN²⁾ had prepared 2 different compounds of the composition $\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY}_2 \\ \text{Cl}_2 \end{array} \right]$ which according to WERNER are cis and trans isomers having a planary configuration. The measurements of the magnetic susceptibility gives as a result for the cis and trans compounds respectively $-0,417 \cdot 10^{-6}$ and $-0,421 \cdot 10^{-6}$, i. e. practically the identical values. HANTZSCH³⁾ has determined the molecular weight of both substances in phenol in which solvent they give the normal molecular weight. This result supports the view of WERNER. In other cases, e. g. the (assumed) cis and trans $\left[\text{Pt} \begin{array}{c} (\text{NH}_3)_2 \\ \text{Cl}_2 \end{array} \right]$, the molecular weight has been shown to be normal for the cis form whilst the "trans" form is bimolecular⁴⁾. This of course is no decisive proof against the planary configuration but it lessens the value of the arguments for this configuration. The compounds of GRÜNBERG⁵⁾ cis and trans $\left[\text{Pt} \begin{array}{c} (\text{NH}_3)_2 \\ (\text{CNS})_2 \end{array} \right]$

¹⁾ A. WERNER: Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **3**, 310. 1893.

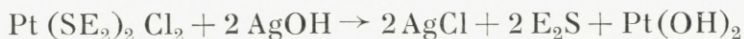
²⁾ S. M. JØRGENSEN: J. pr. Ch. [2] **33**, 510, 1886.

³⁾ HANTZSCH, Ber. **59**, 2761 1926; Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **159**, 273. 1927.

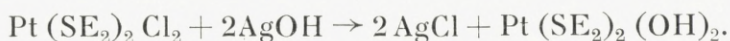
⁴⁾ REIHLEN and NESTLE: Ann. d. Chem. **447**, 211. 1926.

⁵⁾ GRÜNBERG, A.: Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **157**, 299. 1926.

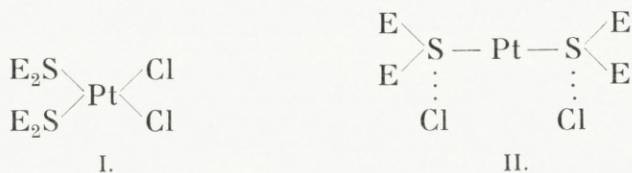
are unimolecular when dissolved in acetone. However, REIHLEN and NESTLE¹⁾ called attention to the point that these compounds are not necessarily cis-trans isomers but may be "salt isomers" (normal and iso-thiocyanates), which of course is possible. Furthermore, we mention the very interesting compounds of ANGELL, DREW and WARDLAW²⁾ namely the two substances both of which have the composition $\left[\text{Pt} \begin{matrix} (\text{S}(\text{C}_2\text{H}_5)_2)_2 \\ \text{Cl}_2 \end{matrix} \right]$. Both isomers are soluble in benzene and both give the simple molecular weight. We might then interpret these compounds as cis and trans forms. However, it turns out that the properties of the two forms (α and β) are so different that it seems difficult to assume merely a cis-trans isomerism. The α -compound is insoluble in water, the β -compound is rather soluble in water. The α -form reacts slowly with $\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$ according to:



whilst the β -form gives a rapid reaction according to:



ANGELL, DREW and WARDLAW assume that the α -compound has a constitution corresponding to the WERNER formula (I) and that the β -form is a sulphonium compound (II).

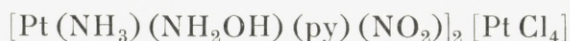


¹⁾ REIHLEN and NESTLE: Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **159**, 343. 1927.

²⁾ F. G. ANGELL, H. D. K. DREW and W. WARDLAW: J. Chem. Soc. **1930**, 349.

However, there are obvious objections to formula II and the problem of the constitution of these compounds cannot be considered as settled.

As further chemical evidence of the planary configuration we mention that TSCHERNIAEFF¹⁾ has succeeded in the isolation of 3 different compounds:



and it was not possible to resolve the compounds in optical antimers. This supports WERNER'S view. Some physical evidence for the plane structure has been obtained during the last few years from the x-ray examination of some complex platinous compounds. In the following table is given the material available and the results of our magnetic measurements on the same compounds.

Table 1.

Substance	X-ray evidence	$\chi \cdot 10^6$
$[\text{PtCl}_4] \text{K}_2$	planary ²⁾	-0.383
$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4]\text{Cl}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$	planary ³⁾	-0.412
$[\text{Pten}_2] \text{Cl}_2$	planary ⁴⁾	-0.365
$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4][\text{PtCl}_4]$	planary ⁵⁾	-0.306

The results of the X-ray examinations and the magnetic measurements are in conformity to the theory of PAULING.

¹⁾ E. TSCHERNIAEFF: Abstracts Ch. Soc. **1928**. 974.

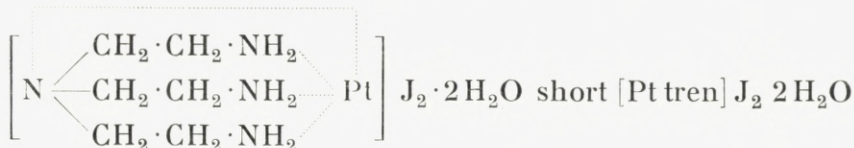
²⁾ R. G. DICKINSON: J. Am. Ch. Soc. **44**. 774, 2404. 1922.

³⁾ E. G. COX: J. Ch. Soc. **1932**. 1912.

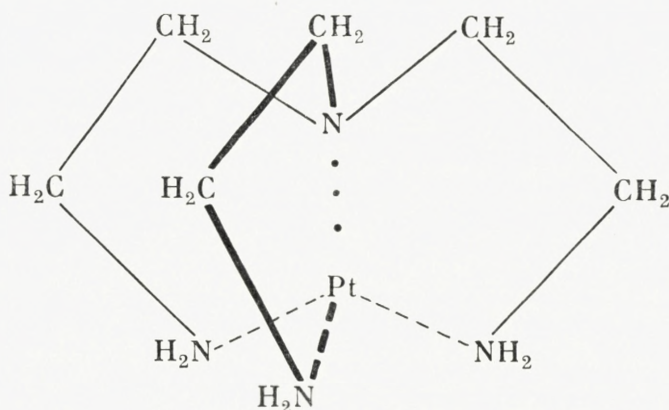
⁴⁾ E. G. COX, F. W. PINKARD, W. WARDLAW and G. H. PRESTON: J. Ch. Soc. **1932**. 2527.

⁵⁾ E. G. COX and G. H. PRESTON: J. Ch. Soc. **1933**. 1089.

In the year 1925 MANN and POPE¹⁾ prepared a compound which had the composition:



The 2 water molecules are given off in a vacuum and do not belong to the complex part of the molecule. MANN and POPE assumed that this substance had a planary configuration. This is however difficult to imagine. REIHLEN²⁾ has proposed the more obvious constitution according to which the four nitrogen atoms are tetrahedrally distributed around the platinum atom:



The molecular weight of the compound has not been determined because no solvent has been found in which the substance is soluble. The 2 iodine ions atoms do not belong to the complex part, because the tetrachloroplatinite $[\text{Pt tren}] [\text{PtCl}_4]$ has been prepared. This compound does not contain water. If the theory of PAULING is correct, and REIHLEN'S view is correct, this compound should be paramag-

¹⁾ MANN and POPE: Proc. Roy. Soc. A. **109** 444, 1925.

²⁾ REIHLEN: Liebigs Ann. **448** 312, 1926.

netic. Our measurements show, however, that it is diamagnetic as well as the chloroplatinite.

It is obvious that more chemical investigation is necessary to give convincing evidence for the planary configuration of complex platinum compounds (the same is true in the case of Ni^{II} and Pd^{II} compounds) before this can be considered as an experimental proof of the theory of PAULING. On the other hand PAULING's theory, as far as magnetism is concerned, seems to be too approximate to be applied in the decision of constitution problems without other supporting evidence.

Two compounds in the table of magnetic susceptibility given at the end of this paper are of particular interest, namely: MAGNUS' green salt and the red salt of JØRGENSEN and SØRENSEN, both of which have the composition $[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4][\text{PtCl}_4]$ but are different in colour. Both the substances are diamagnetic with practically the same susceptibility ($\chi_{\text{red}} < \chi_{\text{green}}$). An x-ray examination by HERTEL and SCHNEIDER¹⁾ has shown that both salts contain ions of planary structure. The position of the complex ion $[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4]^{++}$ in the two different forms relative to the $[\text{PtCl}_4]^{--}$ is different, and this fact is supposed to be the reason for the existence of these two MAGNUS salts. A different distribution of the coordinated groups (planary or tetrahedral) is consequently not responsible for the different colour.

Chemical Part.

In a series of papers entitled "Zur Konstitution der Platinbasen"²⁾ S. M. JØRGENSEN has studied the preparation

¹⁾ E. HERTEL and K. SCHNEIDER, Z. anorg. u. allg. Ch. **202** 77, 1931.

²⁾ Zur Konstitution d. Platinbasen I J. pr. Ch. **33** 489, 1886. — Ibid. II Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **24** 153, 1900. — Ibid. III Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **25** 353, 1900. — Ibid. IV Zeit. f. anorg. u. allg. Ch. **48** 374, 1906.

and structure of important complex platinum compounds. Of the collection of complex platinum compounds left by S. M. JØRGENSEN at this laboratory was selected a group of salts, the crystals of which judging by appearances might be expected to have preserved their composition. However, several of them were omitted because the analysis showed that their composition had changed. Others were omitted because the amount of the substances after having been pulverized turned out to be too small for filling the glass tube used in the magnetic measurements. The compounds which we have measured have preserved their composition. However, we notice that a few compounds were re-prepared. With regard to the magnetic purity of the substances we point out that the substance which has been used as a mother substance in most cases is potassium tetrachloroplatinite. This compound it is very easy to obtain in a high degree of purity.

The quantitative analysis of the substances comprises estimations of platinum and in some compounds chlorine and ammonia. These compounds, when heated in a current of hydrogen, give a mirror of platinum on the wall of the tube. For this reason is it impossible to use the method which we have described in the paper on complex rhodium compounds¹⁾. We have then adopted the method of determination which is of common use in determining platinum in complex compounds, namely: The compound is melted together with sodium carbonate. Free platinum is formed. The salts are eliminated and the platinum weighed after having been heated in a current of pure hydrogen.

The platinum obtained in these analysis was used in

¹⁾ J. A. CHRISTIANSEN and R. W. ASMUSSEN: Kgl. Danske Videnskab. Selsk. XII, 10, pag. 8, 1934.

the preparation of some other complex platinum compounds. We give the results of the analysis in the following general view.

The Results of Analysis.

Tetrammineplatinous compounds.

$[\text{Ptpy}_4] \text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ Mol. = 636,4

Dried in air.

When this substance is heated in air at 100° two molecules of pyridine and three molecules of water are given off.

Substance: 0.3621	$2\text{py} + 3\text{H}_2\text{O}$, S.M.J.:	33.39 %
Total loss of weight: 0.1209	- - - R.W.A.:	33.34 —
	- - - Calc.:	33.33 —

Substance: 0.2974	S.M.J.:	30.50 % Pt
Platinum: 0.0912	R.W.A.:	30.66 — Pt
	Calc.:	30.67 — Pt

$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY} \\ (\text{NH}_3)_3 \end{array} \right] \text{Cl}_2$ Mol. = 396.2

Dried in air.

Substance: 0.1793	Calculated:	49.27 % Pt
Platinum: 0.0882	Found:	49.18 — —

$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} (\text{NH}_3)_2 \\ \text{PY}_2 \end{array} \right] \text{Cl}_2$ Mol. = 458.3

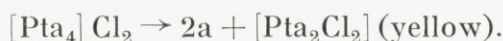
Dried at 100°

	S.M.J.:	42.45 % Pt
Substance: 0.1727	R.W.A.:	42.54 — —
Platinum: 0.0735	Calc.:	42.59 — —

$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4] \text{Cl}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ Mol. = 352.3.

The label of this specimen had been lost. However, the crystals were very nice. As it turned out that the compound

when heated gave off ammonia and became yellow, it was concluded that this compound was a tetrammine, which gives the general reaction:



The analysis shows that this substance had the composition mentioned above. The analysis was carried out after drying in the air.

Substance: 0.7598
Platinum: 0.4205 Platinum found: 55.34 %; Calc.: 55.38 %.

A sample was heated at 250°; 2NH₃ + H₂O given off.
Substance: 0.4356 2NH₃ + H₂O Calc.: 14.79 %
Total loss of weight: 0.0642 — Found: 14.73 %

Ammonia was determined by titration (after distillation with sodium hydroxide)

Substance: 0.2642 Calc.: 19.33 % NH₃
30.20 cc 0.0990 n HCl Found: 19.27 — —

[Pt en₂]Cl₂ Mol. = 386.3

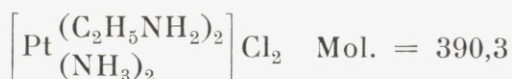
Dried at 100°

Substance: 0.2157 S.M.J.: 50.55, 50.37 % Pt
Platinum: 0.1087 R.W.A.: 50.41 —
Calc.: 50.54

$\left[\text{Pt}^{\text{en}} (\text{NH}_3)_2 \right] \text{Cl}_2$ Mol. = 360.06

Dried in air

Substance: 0.2044 S.M.J. 54.12 % Pt
Platinum: 0.1110 R.W.A.: 54.31 —
Calc.: 54.19 —



Dried at 100°

	S.M.J.:	50.01 % Pt	
Substance:	0.2008	R.W.A.:	49.62 —
Platinum:	0.0996	Calc.:	49.98 —

Non-electrolytes

Dried at 100°

	S.M.J.:	45.86; 45.82 % Pt	
Substance:	0.4520	R.W.A.:	45.82 %
Platinum:	0.2072	Calc.:	46.02 —



Dried in air

	S.M.J.:	54.56 % Pt	
Substance:	0.4663	R.W.A.:	54.83 —
Platinum:	0.2557	Calc.:	54.81 —

According to the label the compound should be $[\text{Pt}(\text{CH}_3)_2\text{NH}]\text{Cl}_2$. The analysis shows that the composition is the one given above, see also S.M.J. Z. an. Ch. 48. 379, 1906.



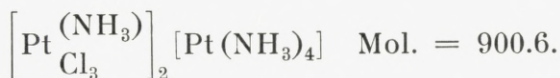
Dried in air

	S.M.J.:	46.47 % Pt	
Substance:	0.2962	R.W.A.:	46.31 —
Platinum:	0.1372	Calc.:	46.78 —

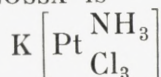
Compounds of the type: $[\text{Pt}_4] [\text{PtCl}_4]$.

Dried in the air.

	S.M.J.: 54.82 % Pt
Substance: 0.2173	R.W.A.: 54.90 —
Platinum: 0.1193	Calc.: 54.80 —



COSSA's salt Ber. **23**, 2504, 1890. First salt of COSSA is



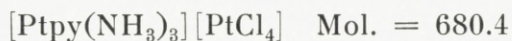
Substance: 0.2092	Calc.: 65.03 %
Platinum: 0.1360	Found: 65.01 —



Substance: 0.2228	S.M.J.: 59.52, 59.65 % Pt
Platinum: 0.1327	R.W.A.: 59.56 —
	Calc.: 59.84 —

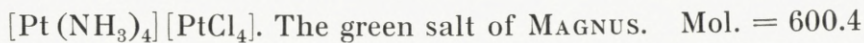


Substance: 0.2603	S.M.J.: 54.68
Platinum: 0.1430	R.W.A.: 54.94
	Calc.: 54.80



Dried in vacuum over H_2SO_4

Substance: 0.2126	S.M.J. 57.42
Platinum: 0.1223	R.W.A.: 57.53
	Calc.: 57.37



Dried in air.

Substance: 0.2876	Calc.: 65.03 % Pt.
Platinum: 0.1874	Found: 65.15

$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4][\text{PtCl}_4]$. The red salt of S. M. JØRGENSEN and
S. P. L. SØRENSEN¹⁾

Dried at 96°

Substance: 0.2667	Calc.: 65.03 % Pt
Platinum: 0.1736	Found: 65.09 —

$\left[\text{Pt} \begin{matrix} \text{PY}_2 \\ (\text{NH}_3)_2 \end{matrix} \right] [\text{PtCl}_4]$. Mol. = 724.4.

Dried at 100°	S.M.J.: 53.71, 53.68 % Pt
Substance: 0.2734	R.W.A.: 53.91 —
Platinum: 0.1474	Calc.: 53.76 —

$[\text{Pt}(\text{NH}_2\text{C}_2\text{H}_4)_3\text{N}]\text{J}_2$ ²⁾

Molecular weight by platinum estimation 605. Calc. 595.

$\left[\text{Pt} \begin{matrix} (\text{NH}_3)_4 \\ (\text{CH}_3\text{CN})_2 \end{matrix} \right] \text{Cl}_2$ ³⁾

Molecular weight by platinum estimation 419. Calc. 416.4.

The Results of the Magnetic Measurements.

The measurements were performed with the same apparatus and using the same mode of procedure as we have described in our paper on complex rhodium compounds⁴⁾. In the following table we give the mass susceptibilities calculated from our measurements.

		Temperature	$-\chi \cdot 10^6$	$-\chi \cdot 10^6$ mean
$[\text{Ptpy}_4] \text{Cl}_2 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$	I	18° 0	0.470	
			0.464	
				0.472
— —	II	18° 5	0.475	
			0.479	

¹⁾ Z. anorg. und allgem. Ch. **48** 441, 1906.

²⁾ MANN and POPE: Proc. Roy. Soc. **A**. **109**, 444. 1925; 482, 1926.

³⁾ TSCHUGAEFF: C. r. **161**. 563. 1928. We thank Magister K. A. JENSEN who kindly prepared and analysed the compounds ²⁾ and ³⁾.

⁴⁾ J. A. CHRISTIANSEN and R. W. ASMUSSEN: Studies in Magnetochemistry Part I. Det kgl. danske Vidsk. Selsk. Math.-fys. Medd. XII. 10. 1934.

		Temperature	$-\chi \cdot 10^6$	$-\chi \cdot 10^6$ mean
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY} \\ (\text{NH}_3)_3 \end{array} \right] \text{Cl}_2$		20°.5	0.430	0.436
			0.442	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY}_2 \\ (\text{NH}_3)_2 \end{array} \right] \text{Cl}_2$		19°.0	0.391	0.397
			0.404	
$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4] \text{Cl}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$	I	18°.2	0.410	0.412
			0.404	
— —	II	18°.5	0.413	
			0.419	
$[\text{Pten}_2] \text{Cl}_2$		19°.2	0.370	0.365
			0.359	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{en} \\ (\text{NH}_3)_2 \end{array} \right] \text{Cl}_2$		20°.0	0.312	0.306
			0.301	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} (\text{NH}_3)_2 \\ (\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2)_2 \end{array} \right] \text{Cl}_2$		19°.8	0.403	0.411
			0.418	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY}_2 \\ \text{Cl}_2 \end{array} \right] \text{cis.}$		19°.5	0.409	0.417
			0.424	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{PY}_2 \\ \text{Cl}_2 \end{array} \right] \text{trans}$		20°.5	0.415	0.421
			0.426	
$[\text{Pt}((\text{CH}_3)_2\text{NH})_2\text{Cl}_2]$		19°.0	0.386	0.379
			0.372	
$\left[\begin{array}{c} (\text{CH}_3)_2\text{NH} \\ \text{Pt NH}_3 \\ \text{Br}_2 \end{array} \right]$		19°.2	0.313	0.321
			0.328	
$[\text{Pt}((\text{CH}_3)_2\text{NH})_4] [\text{PtCl}_4]$		21°.0	0.394	0.387
			0.380	
$\left[\text{Pt} \begin{array}{c} \text{NH}_3 \\ \text{Cl}_3 \end{array} \right]_2 [\text{Pt}(\text{NH}_3)_4]$		21°.0	0.332	0.327
			0.321	
$[\text{Pten}_2] [\text{PtCl}_4]$		21°.0	0.301	0.306
			0.310	
$[\text{Pt}(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2)_4] [\text{PtCl}_4]$		21°.5	0.336	0.344
			0.350	

	Temperature	$-\chi \cdot 10^6$	$-\chi \cdot 10^6$ mean
$\left[\text{Pt} \begin{matrix} (\text{NH}_3)_2 \\ ((\text{CH}_3)_2\text{NH})_2 \end{matrix} \right] [\text{PtCl}_4] \text{H}_2\text{O}$	20°.0	0.309	0.316
		0.322	
$\left[\text{Pt} \begin{matrix} \text{PY} \\ (\text{NH}_3)_3 \end{matrix} \right] [\text{PtCl}_4]$	20°.5	0.294	0.292
		0.290	
$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4] [\text{PtCl}_4]$ green	21°.5	0.299	0.306
		0.310	
$[\text{Pt}(\text{NH}_3)_4] [\text{PtCl}_4]$ red	21°.5	0.290	0.293
		0.295	
$\left[\text{Pt} \begin{matrix} \text{PY}_2 \\ (\text{NH}_3)_2 \end{matrix} \right] [\text{PtCl}_4]$	21°.5	0.300	0.307
		0.314	
$[\text{PtCl}_4] \text{K}_2$	20°.0	0.388	0.383
		0.377	
$[\text{Pt}(\text{NH}_2\text{C}_2\text{H}_4)_3\text{N}] \text{J}_2$	21°.5	0.432	0.440
		0.448	
$\left[\text{Pt} \begin{matrix} (\text{NH}_3)_4 \\ (\text{CH}_3\text{CN})_2 \end{matrix} \right] \text{Cl}_2$	21°.5	0.391	0.398
		0.405	

We desire to thank the Carlsberg Fund for a grant which made possible this work.

Chemical Dept. A.
of the Royal Technical College,
Copenhagen.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 12.

ON THE VELOCITY OF THE THERMAL
DECOMPOSITION OF AMMONIA
ON A QUARTZ SURFACE

BY

J. A. CHRISTIANSEN AND EGGERT KNUTH



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

1. Introduction and Summary.

M. BODENSTEIN and F. KRANENDIECK¹ and later C. N. HINSHELWOOD and R. E. BURK² investigated the decomposition of ammonia in quartz-bulbs at about 800° C. The results of these two pairs of investigators do not agree in all respects but in one they agree completely: The reaction takes place exclusively or almost exclusively on the quartz-surface. B. and K. found, further, that the reaction is retarded by one of the products, but were unable to find any effect of added hydrogen or nitrogen. H. and B., on the other hand, succeeded in showing that added hydrogen had a retarding effect, and added nitrogen none at all. Finally B. and K. found proportionality between the initial velocity and the square root of the ammonia-pressure, while H. and B. found proportionality between the initial velocity and the first power of the ammonia-pressure.

The reason why the results differ is not quite clear. As, however, B. and K.'s quartz-bulb was much more permeable to hydrogen than that of H. and B. the difference may be traced to a difference between the surfaces.

We have repeated the experiments in so far as we have investigated the decomposition at pressures from 2 to 7 cm. and various temperatures without any addition of foreign gas. We made no direct experiments on the effect of in-

¹ Nernst Festschrift, 1912, p. 99 and F. KRANENDIECK, Dissertation Hannover, 1912.

² Journal chem. Soc. (London) **127**, p. 1105 (1925).

creasing the quartz-surface, but still our experiments show that the reaction is at least to a large extent a wall reaction, as its velocity varies considerably with the preceding treatment of the bulb.

In a single run, however, the course seemed quite regular, and we succeeded in finding an expression for the degree of decomposition as a function of time, which conformed with the experiments up to about 95 % decomposition. From this expression we derived a reaction-mechanism, in which the radical NH played an essential part. Some preliminary experiments with the reaction products made the presence of this substance therein probable.

2. The Cinetic Experiments.

The construction of the apparatus appears from the following description. The electric furnace was a well insulated porcelain tube wound with nichrom-wire. To get a better temperature distribution the quartz-bulb which was provided with a thermometer-pocket was placed in a rather thick-walled iron tube inside the porcelain tube. The furnace was handregulated. Temperatures were measured by means of a platinum-platinumrhodium thermocouple. The heated volume of the bulb was 201 cm^3 . the dead space including the free volume of the mercury manometer, about 14 cm^3 . The heated surface of the bulb was about 200 cm^2 . Pressures were measured by means of a rather short mercury manometer. It proved sufficiently accurate to measure only the uppermost of the two mercury surfaces in the manometer. The readings were made by means of a horizontal microscope (Leitz) with an ocular micrometer-scale, divided into 100 parts, each division corresponding to 0.05 mm. By suitable illumination we succeeded in getting the picture

of the mercury meniscus so sharp, that the readings were correct to 0.01 mm. and by tapping the manometer before each reading we avoided with about the same accuracy any lag in the movement of the mercury. The microscope could be moved up and down by means of rack and pinion, these movements being read with an accuracy of 0.05—0.1 mm. The advantage of this arrangement was that the last 5 mm. of the total movement could be read with at least as great a relative accuracy as the first far greater movements.

The time was measured by means of a pocket chronograph, the button being pressed, and the meniscus read at the same time. The ammonia was taken from a container with the well known Diver's liquid, a solution of ammonium-nitrate in liquid ammonia. To prevent spray a suitable part of the connecting tubing between bulb and container was packed with cotton wool. An absorber containing conc. sulphuric acid served to protect the oil pump against ammonia.

By a suitable operation of the stopcocks the bulb could be pumped out and filled with ammonia to the desired pressure. The Diver's liquid was boiled out to remove traces of air. It may be mentioned in this connection that air (and oxygen) seemed to have an effect on the reaction. We tried to investigate this, but up till now the results have been very erratic. On account of the influence of the preceding treatment of the bulb on the velocity, well known from previous investigations, we decided to let the reaction-products from one experiment stay over night in the bulb, which remained heated. The next experiment was started by evacuating for about 10 minutes and refilling with ammonia.

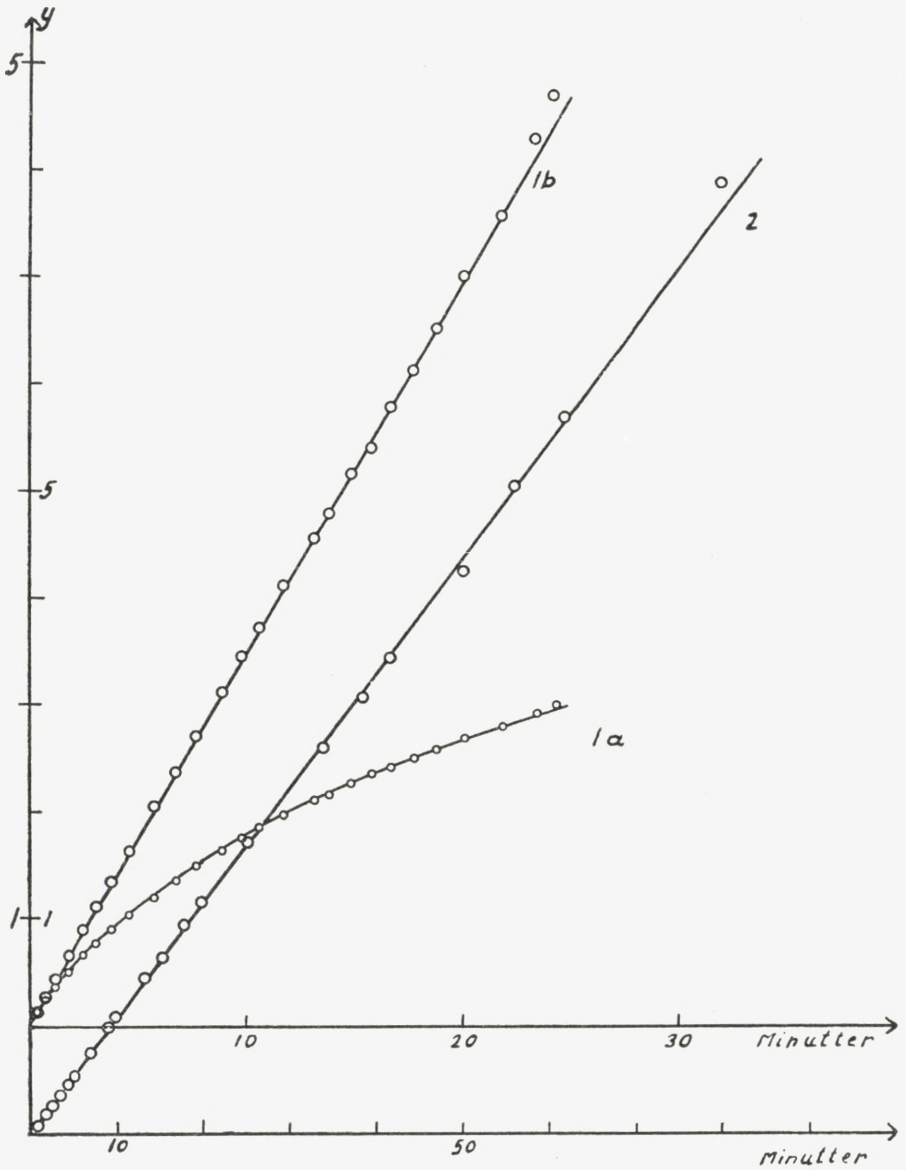


Fig. 1.

Curves 1 a and 1 b refer to experiment 124. The three last readings have not been plotted. Abscissæ: time in minutes, upper scale.

Ordinates 1 a: $\ln p_{\text{NH}_3}$, scale to the right.

Ordinates 1 b: k_1 times t calc., scale to the right.

Curve 2 refers to experiment 96. Abscissæ time in minutes, lower scale.

Ordinates: k_1 times t calc., scale to the left.

3. The Results of the Cinetic Measurements.

Our results are in accordance with H. and B.'s in so far as we also found that the initial velocity was proportional to the first power of the ammonia pressure. The general trend appears from fig. 1, curve 1 a where $\ln p_{\text{NH}_3}$ is plotted against time. The downward curvature is immediately explained by the retarding action of the hydrogen (H. and B.).

In the tables below are given the numerical results of some representative experiments. We selected such in which the temperature did not deviate more than 1° from the mean. As the temperature coefficient is rather low, this accuracy just suffices, although a better constancy would have been desirable. The pressures are corrected for variations in temperature only. On account of the rather large dead space this will make the absolute velocities low by about 7 % but it will have no effect on the form of the curves. Other systematic errors might arise from the variation in total volume caused by the mercury-manometer and from lack of homogeneous distribution of the gases between the reaction vessel proper and the dead space. A rough estimate, however, showed these errors to be negligible.

Table 1.

Experiment 96.

Final pressure $P_\infty = 55.75$ mm. Hg; $T^\circ \text{ abs.} = 1062^\circ$; $k = 0.0535$; $f = 0.0050$; $g = 4.0$.

$T^\circ \text{ abs.}$	t exp. min. sec.	P_t mm. Hg	P_{NH_3} mm. Hg	t calc. min. sec.
1062	0 18	29.30	26.45	0 13
	0 52	29.90	25.85	0 38
	1 45	31.10	24.65	1 33
	2 28	32.10	23.65	2 20

T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
	3 22	33.20	22.55	3 14
	4 17	34.30	21.45	4 12
	5 05	35.10	20.65	4 56
	7 06	37.20	18.55	7 03
	9 02	39.10	16.65	9 12
1062	9 52	39.80	15.95	10 06
	13 20	42.30	13.45	13 30
	15 14	43.50	12.25	15 18
	17 52	45.00	10.75	18 06
	19 53	46.00	9.75	20 11
	25 14	48.10	7.65	25 21
1061	34 00	50.50	5.25	33 35
	38 34	51.40	4.35	37 54
	41 46	52.00	3.75	41 24
	50 19	53.00	2.75	48 48
	56 15	53.70	2.05	56 15
1061	62 00	54.10	1.65	62 12
1061	80 27	54.90	0.85	82 16

Experiment 124.

Final pressure $P_{\infty} = 59.42$ mm. Hg; T° abs. = 1157° ;

$k = 0.347$; $f = 0.040$; $g = 5.5$.

T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
1157	0 23	35.00	24.42	0 25
	0 43	37.50	21.92	0 47
	1 10	40.00	19.42	1 16
	1 47	42.50	16.92	1 51
	2 32	45.00	14.42	2 37
	3 05	46.50	12.92	3 12
	3 47	48.00	11.42	3 53
	4 37	49.50	9.92	4 43
	5 45	51.00	8.42	5 54
1157	6 48	52.20	7.22	6 49
	7 47	53.10	6.32	7 45
	8 58	54.00	5.42	8 58
	9 51	54.60	4.82	9 54

T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
	10 40	55.00	4.42	10 41
1157	11 49	55.50	3.92	11 48
	13 10	56.00	3.42	13 11
	13 55	56.20	3.22	13 47
	14 55	56.50	2.92	14 49
	15 52	56.70	2.72	15 50
	16 45	56.90	2.52	16 37
	17 48	57.10	2.32	17 35
	18 59	57.30	2.12	18 47
	20 13	57.50	1.92	20 08
1157	22 00	57.70	1.72	21 48
	23 34	57.90	1.52	23 49
	24 25	58.00	1.42	25 00
	25 35	58.10	1.32	26 42
	26 48	58.20	1.22	27 48
	28 09	58.30	1.12	29 31

Experiment 131.

Final pressure P_∞ = 36.50 mm. Hg; T° abs. = 1132°;

k = 0.133; f = 0.017; g = 4.0.

T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
1132	0 11	19.00	17.50	0 10
	0 32	19.70	16.80	0 28
	1 06	21.00	15.50	1 06
	1 39	22.00	14.50	1 37
1132	2 13	23.00	13.50	2 12
	3 00	24.20	12.30	2 59
	3 33	25.00	11.50	3 34
1132	4 17	26.00	10.50	4 21
	5 09	27.00	9.50	5 15
1132	6 07	28.00	8.50	6 16
1132	9 39	30.50	6.00	9 36
	10 55	31.20	5.30	10 50
1132	11 29	31.50	5.00	11 27
	12 39	32.00	4.50	12 34
1132	13 58	32.50	4.00	13 53

T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
	15 26	33.00	3.50	15 23
	17 11	33.50	3.00	17 10
1132	18 27	33.80	2.70	18 30
1132	19 28	34.00	2.50	19 24
1132	21 09	34.30	2.20	21 00
1132	25 08	34.90	1.60	25 24
1132	32 16	35.50	1.00	33 12

Experiment 132.

Final pressure $P_{\infty} = 57.15$ mm. Hg; T° abs. = 1134° ;

$k = 0.135$; $f = 0.017$; $g = 4.0$.

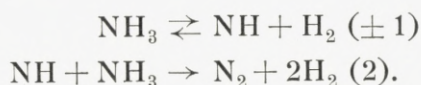
T° abs.	t exp. min. sec.	P _t mm. Hg	P _{NH₃} mm. Hg	t calc. min. sec.
1134	0 25	31.00	26.15	0 25
	0 52	32.50	24.65	0 52
	1 22	34.00	23.15	1 23
	1 43	35.00	22.15	1 44
1134	2 30	37.00	20.15	2 32
	3 24	39.00	18.15	3 26
	4 47	41.50	15.65	4 48
	5 43	43.00	14.15	5 45
	6 37	44.25	12.90	6 39
1134	7 12	45.00	12.15	7 12
	8 33	46.50	10.65	8 34
1134	10 09	48.00	9.15	10 12
1134	11 24	49.00	8.15	11 29
1134	14 44	51.00	6.15	14 42
1134	18 34	52.60	4.55	18 25
1134	21 50	53.60	3.55	21 43
1134	25 03	54.30	2.85	25 00
1134	35 23	55.61	1.54	35 21
1134	50 06	56.40	0.75	52 24

The first column shows the absolute temperature, the second the time of reading, the third the pressure in mm. mercury. The fourth column shows the difference between

the final pressure and the pressure at time t , which is equal to the ammonia pressure at that time.¹ The meaning of the fifth will be explained later.

4. The Mechanism of the Reaction.

To determine the mechanism we applied the method given by one of us.² The simplest way in which to account for the retarding effect of hydrogen would be to assume the following mechanism:



The corresponding expression for the reciprocal velocity $\frac{1}{v}$ is

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_1 w_1} + \frac{1}{a_1 w_1} \cdot \frac{w_{-1}}{w_2}$$

where

$$a_1 = p_{\text{NH}_3}, \quad w_1 = k_1, \quad w_{-1} = k_{-1} \cdot p_{\text{H}_2}, \quad w_2 = k_2 \cdot p_{\text{NH}_3}.$$

Taking a as the original pressure of ammonia and x as the amount which has disappeared at time t we get a differential equation between t and x which easily can be integrated, giving t as a function of a , x and the two constants k_1 and $\frac{k_{-1}}{k_2}$. Although the two constants could be chosen so as to give good agreement with the experiments over a large interval, it proved impossible to get agreement over the complete range measured. It turned out, however, that a slight modification of the expression, subtraction of

¹ This is true even if the reaction $\text{NH}_3 \rightarrow \text{NH} + \text{H}_2$ has taken place to any extent.

² J. A. CHRISTIANSEN, *Z. physikal. Chem.* **B 28** (1935) 303. See also G.-M. SCHWAB, *Z. physikal. Chem.* **B 8** (1930) 141.

x times a third constant, gave practically complete agreement for the whole range, i. e. from 0 to about 95 % decomposition. This final expression can be written in the form

$$k_1 t = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} a - \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} \frac{k_{-2}}{k_3} \right) \ln \frac{a}{a-x} \\ + \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} \frac{k_{-2}}{k_3} \frac{x}{a-x} - \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} x.$$

After a suitable choice of the three constants

$$k_1, \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} = f \text{ and } \frac{k_{-2}}{k_3} = g$$

the values of t could be calculated from a and x. These are given in the tables as t calc. A glance at the tables and curves 1 b and 2 in fig. 1 shows the agreement obtained.

Differentiation of the above expression gives

$$k_1 \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a-x} + \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} \frac{x}{a-x} + \frac{3}{2} \frac{k_{-1}}{k_2} \frac{k_{-2}}{k_3} \frac{x}{(a-x)^2}$$

or

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{k_1 p_{\text{NH}_3}} + \frac{1}{k_1 p_{\text{NH}_3}} \cdot \frac{k_{-1} p_{\text{H}_2}}{k_2} + \frac{1}{k_1 p_{\text{NH}_3}} \cdot \frac{k_{-1} p_{\text{H}_2}}{k_2} \cdot \frac{k_{-2}}{k_3 p_{\text{NH}_3}}.$$

Comparing with

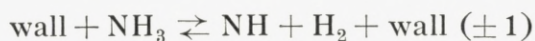
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_1 w_1} + \frac{1}{a_1 w_1} \cdot \frac{w_{-1}}{w_2} + \frac{1}{a_1 w_1} \cdot \frac{w_{-1}}{w_2} \cdot \frac{w_{-2}}{w_3}$$

we get:

$$a_1 = p_{\text{NH}_3}; w_1 = k_1; w_{-1} = k_{-1} p_{\text{H}_2}; w_2 = k_2; \\ w_{-2} = k_{-2}; w_3 = k_3 p_{\text{NH}_3}.$$

This leads immediately¹ to the mechanism

¹ J. A. CHRISTIANSEN, Z. physical. chem. **B 28** (1935) 303.



To explain the results it is thus necessary to assume three steps instead of two. The essential point is the occurrence of the NH-radical which at once explains the strong retardation by hydrogen. It may be remarked here that the mechanism found is no chain mechanism in the ordinary sense of the word. With the nomenclature proposed by one of us¹, it should be called an open sequence of reactions, while a chain reaction would be called a closed sequence.

From our experiments and their mathematical treatment given above it can only be concluded that NH and NH* are two different forms of the radical. It might seem natural to assume that NH means an NH adsorbed on the quartz-surface and NH* the same radical in the vapour phase. A discussion of the temperature coefficients of the three constants in connection with our knowledge of the heat of formation of ammonia, however, does not support this view. Judging from the discussion it seems more probable, that both forms react in the adsorbed state. As, however, the determination of the temperature coefficients is not very accurate, and as for the present we consider the question of the two forms of the radical NH as being of secondary importance only, we refrain from entering more deeply into this matter, and restrict ourselves to giving the values of the constants at different temperatures in the section below.

¹ J. A. CHRISTIANSEN, Z. physical. chem. **B 28** (1935) 303.

5. The Dependency on Temperature of the Constants.

Table 2.

Exp.	T° abs.	t = 0					
		pNH ₃ mm. Hg	P _∞ mm. Hg	Δ mm. Hg.	k ₁	f	g
96	1062	26.84	55.75	1.04	0.0535	0.0050	4.0
97	1065	28.65	59.85	1.28	0.0506	0.0051	2.7
104	1075	26.85	56.15	1.23	0.0720	0.0058	14.7
103	1077	26.70	55.50	1.05	0.0775	0.0065	14.7
98	1111	29.60	61.80	1.30	0.135	0.011	3.3
100	1113	28.30	58.80	1.10	0.125	0.011	3.3
99	1116	28.20	58.90	1.25	0.149	0.017	4.0
102	1117	28.10	59.10	1.45	0.171	0.014	3.6
101	1119	27.80	58.60	1.50	0.152	0.014	3.6
125	1129	27.20	56.60	1.10	0.172	0.017	4.0
126	1130	27.85	58.67	1.49	0.191	0.020	4.0
130	1129	17.64	36.20	0.46	0.133	0.017	4.0
129	1131	17.67	35.83	0.25	0.138	0.017	4.0
131	1132	17.92	36.50	0.33	0.133	0.017	4.0
132	1134	27.65	57.15	0.93	0.135	0.017	4.0
133	1135	27.47	57.40	1.23	0.137	0.014	4.0
124	1157	27.82	59.42	1.89	0.347	0.040	5.5

The first column gives the serial number of the experiment, the second the temperature. The third column gives the ammonia pressure (compare p. 11) extrapolated to time zero, and the fourth the final total pressure. The meaning of Δ in column 5 will be explained below. The columns 6, 7 and 8 give the three constants mentioned p. 12, k_1 , f and g .

On account of the method of determination, the values of k_1 must be expected to be the most and the values of g the least accurate. Unfortunately time did not permit us to repeat experiments 103 and 104, the g -values of which differ so much from the rest, that we suspect them of being quite erroneous.

6. Experiments on the detection of NH.

Inspection of columns 3 and 4 in table 2 shows that the extrapolated initial ammonia pressure is a little less than half of the final pressure. The difference, Δ , is given in column 5 in the table. On account of the difficulty in securing the initial pressure by extrapolation we will not lay too much stress upon this deviation, but it might mean that just after the start the dissociation $\text{NH}_3 = \text{NH} + \text{H}_2$ takes place to an extent which is not quite negligible. We therefore made some preliminary experiments to detect NH in the reaction-products.

The procedure adopted was the following:

Method a). Dry ammonia at a pressure of 5—10 mm. mercury was passed as fast as possible through a nearly white hot quartz-tube. Just behind the heated zone water vapor was admitted through a side-tube, the arrangement being that a constriction on the main tube to a large extent prevented back diffusion of the water vapour into the heated zone. The gas mixture was passed through a trap cooled with liquid air or carbon-dioxide + alcohol and the permanent gases pumped off with the oil-pump.

Method b). Dilute ammonia-water was evaporated and the vapours pumped through the quartz-tube at about 5—10 mm. and passed through the trap as before. The side-tube was closed.

Method c). This was method b) modified so as to admit a slow stream of air through the side tube.

We expected eventually formed NH to react with water, giving NH_2OH . Consequently the contents of the trap after each experiment were melted and the liquid tested

for hydroxylamine by the very sensitive method of J. BLOM¹. This method which consists in the oxidation of hydroxylamine into nitrous acid and detection of this by the Griess-reaction includes also a test for nitrous acid.

On cooling the trap with liquid air both method a) and b) gave weak but positive reactions for NH_2OH and stronger reactions for HNO_2 . In one experiment with method a) we even got quite a distinct reaction for HNO_2 without any detectable trace of NH_2OH .

On cooling with carbon-dioxide the same two methods gave weaker reactions for HNO_2 and none at all for NH_2OH .

Of course we took every possible precaution to avoid the presence of air in the apparatus during the experiments, but naturally air had to be admitted after the melting and before the test.

We performed only one experiment according to c), in which we cooled by liquid air. This gave a very strong reaction for HNO_2 and none at all for NH_2OH .

There are several possibilities of explaining the formation of nitrous acid, but on account of lack of further experimental data we refrain from entering on a discussion of these. At any rate our experiments seem to us to indicate strongly the presence of NH in the products of thermal dissociation of NH_3 . As mentioned above, there seems to be a distinct difference between the experiments with liquid-air cooling on one side and those with carbon-dioxide cooling on the other, in so far as the reaction for $\text{NH}_2\text{OH} + \text{HNO}_2$ is distinctly less in the latter case. This might indicate that NH is a gas whose "temperature of condensation" lies somewhere between -190 and -80°C .

¹ Ber. 1926 I, p. 121.

7. Other Investigations and Conclusive Remarks.

It appears from the above that, although our experimental results show a fairly complete agreement with those of H. and B., the hypotheses underlying the theoretical treatment are quite different. H. and B. assumed with LANGMUIR that the retardation by hydrogen is caused by a displacement on the quartz-surface of ammonia by the hydrogen, while we come to the conclusion that it is caused by a reversion of the first step in a sequence of reactions. We find it correct therefore to emphasize that, although we find our conclusion more natural than the assumption of H. and B. and also find rather strong support for our view in the numerical agreement between experiments and theory, we cannot on this basis assert that our view has been finally proved, since a more detailed treatment based on the views of H. and B. might perhaps lead to an alternative explanation of our results. If, however, the qualitative evidence for the intermediate formation of NH be confirmed by further experiments this would strongly support the correctness of our view.

In this connection it may be useful to mention the rather numerous investigations on the decomposition of ammonia on different surfaces which have appeared since the work of HINSKELWOOD and BURK, and whose underlying theoretical assumptions are analogous to those of these authors. It is true of course that the mechanisms on different surfaces may be quite different, but it is remarkable that the differences between the experimental results seem to be rather of a quantitative than of a qualitative nature. Espe-

cially the retardation by hydrogen is a common feature of nearly all the reactions.

Thus the later investigators^{1,2,3} all agree upon the fact first found by H. and B. that hydrogen has a very strong retarding effect when the decomposition takes place on platinum.

On tungsten H. and B. found no retardation by hydrogen, while C. H. KUNSMAN⁴ found some by hydrogen and almost none by nitrogen.

On molybdenum the same author⁴ found distinct retardation by hydrogen and a small one by nitrogen, in direct opposition to R. E. BURK⁵ who found just the reverse.

On copper E. ELÖD and W. BANHOLZER⁶ and J. K. DIXON⁷ agree in finding a strong retardation by hydrogen and none by nitrogen.

On osmium E. A. ARNOLD and R. E. BURK⁸ found a retardation by hydrogen and nitrogen. We must remark that we have not been able to follow the theoretical treatment of the experimental data in this paper in detail.

From an economic point of view the most important of the catalysts investigated is iron or rather iron mixed with iron nitrides⁹. The decomposition in this case has been investigated *i. a.* by E. ELÖD and W. BANHOLZER⁶ and

¹ G.-M. SCHWAB, Z. physik. Chem. **128** (1927) 161.

² G.-M. SCHWAB, Z. physik. Chem. **B 3** (1929) 337.

³ J. K. DIXON, Journ. am. chem. Soc. **53** (1931) 2071.

⁴ Journ. am. chem. Soc. **50** (1928) 2100.

⁵ Proc. national Acad. science, Wash. **13** (1927) 67.

⁶ Z. Elektrochem. **32** (1926) 555.

⁷ Journ. am. chem. Soc. **53** (1931) 1763.

⁸ Journ. am. chem. Soc. **54** (1932) 23.

⁹ G. HÄGG, Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis (4) **7** (1929) 3. Further references see E. WINTER *l. c.* p. 416.

by E. WINTER¹ who agree in finding a strong retardation by hydrogen.

It is thus seen that in nearly all cases a retardation by hydrogen has been noted, while only in one case (Os) a retardation by nitrogen has been found with any certainty. On account of this qualitative agreement between the behaviour of different catalysts it therefore seems to us to be of general interest to note that in one case (W) A. MITTASCH and W. FRANKENBURGER² report a direct proof of the formation of a surface-layer of NH on the catalyst, and we might take this as additional evidence in favour of our views concerning the mechanism of the reaction.

We would also call attention to the work of M. BODENSTEIN³ on the oxidation of ammonia, as it seems that the reactions occurring may be explained by the primary formation of NH. This would lead us to expect a certain parallelism between the decomposition and the oxydation of ammonia on different catalysts, and from the paper by I. E. ADADUROW and T. I. SSOKOOLWA such a parallelism seems actually to have been found⁴. We must remark, however, that the original paper has not been accessible to us.

Finally we wish to offer a remark concerning the detection of the intermediate product NH. It is well known that intermediate products occurring in a sequence of reactions on account of their very short life in the reacting mixture are often very difficult to detect directly. That it seems to

¹ Z. physikal. chem. **B 13** (1931) 401.

² Z. Elektrochem. **35** (1929) 927.

³ Z. Elektrochem. **41** (1935) 466. Comp. the paper by M. BODENSTEIN on the same subject in the report of the 9th Internat. Congress of pure and applied Chem. Madrid 1934.

⁴ Chem. Zentralbl. 1932 I 341.

be easier in this case might be due to the circumstance that the N-atom is to a certain extent apt to be univalent, a property which from our knowledge of this atom may be expected. Thus the "even" radical NH might be expected to have a longer life than e. g. the "odd" radical NH_2 , and thence be more easily detected.

Chemical department A
Royal Technical College of Denmark.
Copenhagen, August 1935.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 13.

NEUE ANWENDUNGEN
VON MAGNESIUM IN DER ORGANISCHEN
SYNTHESE

II. DIE BARBITURSÄUREKONDENSATION

VON

HAKON LUND



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Die Darstellung von Barbitursäuren aus Malonsäurederivaten und Harnstoff ist der Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen.

Unter den vielen verschiedenen Wegen, die von Malonsäure zu Barbitursäure führen, interessiert uns hier nur die von Malonestern ausgehenden. Die Kondensation von Malonester und Harnstoff unter Abspaltung von Alkohol ist von der Anwesenheit geeigneter Kondensationsmittel bedingt. Wirksam sind eine Reihe von Metallalkoholaten — in der Literatur sind Alkalimetall- und Erdalkalimetallalkoholate angeführt. Um gute Ausbeuten zu erhalten ist es notwendig, den Alkohol sorgfältig zu entwässern. Ganz kleine Wasserkonzentrationen drücken oft die Ausbeuten wesentlich herab. Auch in absolutem Alkohol treten mitunter unerwünschte Nebenreaktionen auf, indem Natriumalkoholat eine Spaltung des Malonesters, z. B. in Diäthylcarbonat und Essigester, bewirken kann¹. In der Herstellung des Veronals werden immer beträchtliche Mengen von Natriumcarbonat als unerwünschtes Nebenprodukt gebildet.

Es konnte nun leicht gezeigt werden, dass Barbitursäure gebildet wurde, wenn eine Lösung von Magnesiummalonester² in absolutem Alkohol mit Harnstoff erhitzt wurde. Die Ausbeute war allerdings nicht besonders gut, und das Verfahren war nicht ohne weiteres auf substituierten Malon-

¹ COPE, McELVAIN, J. Am. Chem. Soc. **54**, 4319 (1932).

² LUND, UCH HANSEN, VOIGT, Kgl. Dan. Vid. Selsk. XII, 9 (1933).

ester anwendbar, weil das Magnesiumalkoholat schwerlöslich in Alkohol ist. Da nun Magnesiummethylat ziemlich löslich in Methylalkohol ist, wurde es versucht, Methylalkohol als Lösungsmittel anzuwenden, und der Versuch gelang über alles Erwarten. Die Kondensation tritt nicht nur beim Siedepunkt der Lösung, sondern auch bei etwas niedrigeren Temperaturen, z. B. 60° , mit präparativ befriedigender Geschwindigkeit ein.

Nach dieser Umgestaltung des Verfahrens wurde die Methode so bequem und die Ausbeuten so befriedigend, dass das Verfahren vielleicht die vorteilhafteste Darstellungsweise mehrerer Barbitursäuren bedeutet. Vielleicht wird es auch einige Synthesen ermöglichen, die bisher nicht durchgeführt werden konnten, z. B. die der Äthylvinylbarbitursäure, die bisher verhindert wurde durch die schnelle Spaltung des entsprechenden Malonesters durch Natriumäthylat.¹

Die Ansprüche auf Wasserfreiheit des Alkohols sind nicht so streng wie wenn Natriumalkoholat verwendet wird. Ein geringer Wassergehalt — bis etwa 4 Promille — wird kaum merkbar stören, wahrscheinlich weil das Magnesiumhydroxyd weitgehend unlöslich im Methylalkohol ist. Im hiesigen Laboratorium hat ein gutes Handelspräparat von Methanol gute Dienste geleistet; aber man muss natürlich den Alkohol untersuchen und nötigenfalls trocknen, um ihn mit vollem Erfolg anwenden zu können. Man prüft am besten die Güte des Alkohols, indem man entweder nach BJERRUM und ZECHMEISTER² verfährt oder den Alkohol mit Magnesiumspänen nach Grignard zum Sieden erhitzt. Wenn eine lebhafte Wasserstoffentwicklung nach

¹ COPE, McELVAIN, *J. Am. Chem. Soc.* **54**, 4318 (1932).

² *Ber.* **56**, 894 (1923).

einigen Minuten nicht eingetreten ist, enthält der Alkohol zu viel Wasser und muss nach den üblichen Methoden getrocknet werden.

Magnesiummethylat ist weniger chemisch aktiv dem Malonester gegenüber als Natriumäthylat. Zwar tritt beim Erhitzen der Malonester mit Magnesiummethylat in Methanol zum Teil Umesterung ein, aber für die Kondensation ist diese Reaktion ohne Bedeutung. Die tieferehenden Spaltungen der Malonester sind nicht oder nur spurenweise bei den gewöhnlichen Malonestern beobachtet worden. Nur in einem Falle wurde eine Spaltung des Malonesters in einem die einfache Barbitursäurekondensation zerstörenden Umfange konstatiert: Methantricarbonester, mit Magnesiummethylat und Harnstoff erhitzt, ergab nur Barbitursäure. In allen anderen bisher untersuchten Fällen konnte nach der Kondensation und Isolierung der Barbitursäure der Malonester in Ausbeuten rückgewonnen werden, die keine grösseren Verluste durch Nebenreaktionen erlaubten.

Das Produkt der Kondensation ist ein Magnesiumsalz der betreffenden Barbitursäure, wahrscheinlich eine Methoxymagnesiumverbindung, weil man 1 Atom oder mehr Magnesium pro Molekül Malonester verwenden muss, um die maximale Ausbeute zu erhalten. Am häufigsten sind diese Verbindungen schwerlöslich im Methanol und scheiden sich also während der Reaktion ab. Sie mögen alsbald in kristallinischer Form erscheinen, bildet aber gewöhnlich zuerst eine zähe, halbfeste Masse, die nach und nach fest und teilweise kristallinisch wird. Mineralsäuren zerlegen sie unter Bildung der freien Barbitursäuren.

Die Geschwindigkeit, womit die Kondensation verläuft, hängt von der Natur des Malonesters ab. Der unsubstituierte Malonester kondensiert sich bei 60° mit Harnstoff

recht schnell: Nach einer Stunde ist die anfangs klare oder opalisierende Lösung zu einem steifen Brei erstarrt; die Reaktion ist jedoch erst nach mehreren Stunden beendet. Etwas langsamer verläuft die Reaktion bei mono- und noch langsamer bei disubstituierten Malonestern. Im allgemeinen empfiehlt es sich, disubstituierten Malonester 48 Stunden bei 65° reagieren zu lassen, um die maximalen Ausbeuten zu erreichen.

Auch Thioharnstoff wird durch Magnesiummethylat in methylalkoholischer Lösung mit Malonester kondensiert. Die Ausbeute ist jedoch nicht besonders gut, und es bilden sich übelriechende Nebenprodukte. Für präparative Zwecke wird diese Methode zur Darstellung von Thiobarbitursäuren deshalb weniger Interesse besitzen, und es wird nur über wenige Versuche in dieser Richtung berichtet werden. — Guanidin kondensiert sich in methylalkoholischer Lösung ohne Kondensationsmittel mit Malonestern.

Über die Kondensation von Cyanessigester und Harnstoff durch Magnesiummethylat wird später berichtet werden.

An den Versuchen haben die Herren Ingenieur J. HAMM und cand. mag. A. VOIGT eifrig teilgenommen, wofür ich ihnen meinen besten Dank auch hier zu bringen wünsche. Dem Carlsbergfond bin ich für ökonomische Unterstützung zu Dank verpflichtet.

Versuchsteil.

Aus den vielen orientierenden Versuchen, die nicht in Einzelheiten wiedergeben werden sollen, gehen die folgenden allgemeinen Tatsachen hervor.

Die Menge des Magnesiums muss etwas mehr als 1 Gramm-atom pro Mol Malonester betragen. Die Ausbeuten an Barbitursäure bei Anwendung von 1, 1.5 und 2.4 Äquivalenten Magnesium betragen in einer Reihe von ganz analog durch-

geführten Versuchen beziehungsweise 48, 66 und 86 % der Theorie.

In den meisten Fällen ist ein beträchtlicher Überschuss von Harnstoff vorteilhaft. Die Ursache ist wahrscheinlich, dass der anfangs halbfeste Niederschlag bedeutende Harnstoffmengen einschliesst und es dadurch der Reaktion in der obenstehenden Lösung entzieht. Grössere Mengen von Ammoniak — durch etwaige Spaltung des Harnstoffes entstanden — sind nicht beobachtet worden.

Die allgemeine Arbeitsweise, die aus den Erfahrungen mit den verschiedenen Malonestern hervorgegangen ist, gestaltet sich bei kleineren Ansätzen (0.1 Mol Malonester) folgendermassen:

3 g Magnesium — Späne nach GRIGNARD — wird in einem trockenen Kolben, der mit Rückflusskühler versehen ist, mit etwa 75 cm³ trockenem Methylalkohol versetzt. Man erhitzt, bis die Wasserstoffentwicklung lebhaft wird. Die Reaktion wird dann ohne Wärmezufuhr bald stürmisch (bei grösseren Ansätzen muss für äussere Kühlung gesorgt werden). Am Schluss kann man, um Zeit zu sparen, wieder erhitzen. Nachdem alles Magnesium in Lösung gegangen ist, fügt man etwa 10 g Harnstoff hinzu und bringt es bei gelinder Erwärmung in Lösung. Endlich wird 0.1 Mol des betreffenden Malonesters zugegeben, und die Lösung wird zum lebhaften Sieden erhitzt. Der Kolben wird dann schnell von dem Kühler abgenommen und dicht verkorkt und danach bei 60—70° gehalten, bis die Kondensation vollendet ist. — Man beurteilt das Fortschreiten der Reaktion bequem in der folgenden Weise: Der Kolben wird im Heizschrank oder im Wasserbad schräg aufgestellt. Während der Reaktion bildet sich am untersten Teil des Kolbens ein zusammenhängender Kuchen, der fest an der Kolbenwand haftet. Wenn der Niederschlag nicht mehr deutlich zunimmt, wird

der Kolben etwas gedreht. Setzt sich nun im Laufe einiger Stunden kein Niederschlag auf den neuen Boden herab, kann die Kondensation als beendet angesehen werden.

Der Methylalkohol wird nun auf dem Wasserbade grösstenteils abdestilliert, und zum Rückstand werden 30 cm^3 conc. Salzsäure + 30 cm^3 Wasser gegeben. Geht die Zerlegung des Magnesiumsalzes sehr langsam, muss der Kuchen etwas zerkleinert werden. Die Barbitursäure scheidet sich — sofort oder nach Kühlung — kristallinisch heraus.

In einigen Fällen konnte in dieser Weise nur ein Teil der gebildeten Barbitursäure gewonnen werden. Die Mutterlauge enthielt dann beträchtliche Mengen von einem Öl, der aus einer Lösung von der Barbitursäure in nicht kondensiertem Malonester bestand. Nach Aufnahme des Öles mit Äther wurde die Säure mit verdünnter Natronlauge aufgenommen, und die Ätherlösung nach Waschen mit Wasser getrocknet und eingedampft. Der Rückstand wurde unter vermindertem Druck destilliert. Dabei zeigte der Ester aber keinen konstanten Siedepunkt, weil er aus einem Gemisch von Äthyl- und Methylester bestand.

Auch wenn die Säuren in guten Ausbeuten auskristallisiert sind, kann man etwas Malonester wiedergewinnen, am besten bei Destillation der Mutterlauge mit Wasserdampf. In einigen Fällen erreichte die Barbitursäureausbeute, auf die tatsächlich verbrauchte Estermenge bezogen, beinahe 100 % der Theorie, siehe z. B. Phenyl- und Diallylbarbitursäure.

Die bei den unten angeführten Synthesenbeispielen angegebenen Ausbeuten beziehen sich auf Rohprodukte, bei 100° getrocknet. Diese Produkte sind im allgemeinen schon sehr rein. In allen Fällen sind jedoch die Säuren durch Umkristallisieren gereinigt und durch den Schmelzpunkt identifiziert worden.

1. Barbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 8 g Harnstoff und 16 g Malonester wurden 20 Stunden bei 65° gehalten. Ausbeute 11 g kristallwasserfreie Barbitursäure = 86 % der Theorie.

Beim Umkristallisieren der Barbitursäure aus heissem Wasser wird immer etwas Dibarbitursäure¹ gebildet, die auch in heissem Wasser sehr schwerlöslich ist. Bei anhaltendem Kochen der wässrigen Lösung werden grössere Mengen davon ausgeschieden. Beim Erhitzen der trockenen Barbitursäure bis etwa 250° zersetzt sie sich.

2. Isopropylbarbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 10 g Harnstoff und 20.5 g Isopropylmalonester wurden 24 Stunden bei 65—70° gehalten. Ausbeute 13.8 g = 81 % d. Th. Schmp. 214° uncorr. FISCHER und DILTHEY² geben 216° corr. an.

Bei Anwendung von 4 g Magnesium wurde 14.2 g = 83 % erhalten.

3. Phenylbarbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 10 g Harnstoff und 24 g Phenylmalonester. Das Magnesiumsalz der Phenylmalonester scheidet sich augenblicklich heraus, geht aber im Laufe von ein paar Stunden wieder in Lösung. Nach 24 Stunden bei 65° ist das Magnesiumsalz der Phenylbarbitursäure als kristallinischer Niederschlag ausgefällt. Bei der Zerlegung mit Salzsäure scheidet sich sofort die in Wasser schwerlösliche Säure aus und ist nach Waschen auf dem Filter mit Wasser, etwas Alkohol und Äther ganz rein, Schmp. 258° uncorr. D. R. P. 247952 gibt den Schmp.

¹ BAEYER, ANN. **130**, 145 (1864).

² ANN. **335**, 358 (1904).

250° an, während VORHEES und SKINNER¹ 263° corr. angeben. — Aus der Mutterlauge wurde in einem Versuche 3.5 reiner Phenylmalonsäure-methylester, Schmp. 49°, isoliert. (RISING und STIEGLITZ² geben 50° an). — Ausbeute 17.0 g Phenylbarbitursäure = 96 %, auf 20.5 g Phenylmalonester bezogen.

4. Diallylbarbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 10 g Harnstoff und 24 g Diallylmalonester. 48 Stunden bei 65°. Regeneriert wurde 5.5 g Diallylmalonester. Ausbeute 15.5 g Dial = 94 %, auf den verbrauchten Ester bezogen. Schmp. 170°. D. R. P. 268158 gibt 170—171° an.

5. Allyl-isopropylbarbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 10 g Harnstoff und 24 g Allyl-isopropylmalonester. 48 Stunden bei 65—70°. Rückgewonnen wurde 7.5 g Malonester. Die Ausbeute war 12.5 g = 81 %, auf 16.5 g Malonester bezogen. Schmp. 137°. Schweiz. Pat. 90592 gibt 137—38° an.

6. Diäthylbarbitursäure.

3 g Magnesium, 75 cm³ Methylalkohol, 10 g Harnstoff und 23 g Diäthylmalonsäure-äthylester. 48 Stunden bei 70°. Rückgewonnen 6 g Malonester. Ausbeute 10 g Veronal = 81 %, auf 17 g Malonester bezogen. Schmp. 189° uncorr. CONRAD und GUTHZEIT³, die die Säure zuerst dargestellt haben, geben 182° an, während Pharm. Dan. 1933 189—191° fordert.

7. Versuche mit Thioharnstoff.

Mit dem unsubstituierten Malonester wurde nur eine kleine Ausbeute an 2-Thiobarbitursäure erhalten, und das

¹ J. Am. Chem. Soc. **47**, 1124 (1925).

² J. Am. Chem. Soc. **40**, 728 (1918).

³ Ber. **15**, 2845 (1882).

Produkt war ziemlich unrein. Dagegen liefert Isopropylmalonester recht glatt die entsprechende Verbindung

2-Thio-5-Isopropylbarbitursäure.

4 g Magnesium, 85 cm³ Methylalkohol, 10 g Thioharnstoff und 20.5 g Isopropylmalonester. 24 Stunden bei 65—70°. Ausbeute 10 g = 68 %. Nach Umkristallisieren aus Wasser ist die Schmp. 178° uncorr.

Diese Substanz scheint nicht beschrieben zu sein, weshalb die folgenden Analysen ausgeführt wurden.

0.1080 g ergab 0.1792 g CO₂ und 0.0535 g H₂O.

Gefunden: C, 45.25 %; H, 5.50 %.

Berechnet für C₇H₁₀O₂N₂S: C, 45.16 %; H, 5.42 %.

Mikro-Kjeldahl. 4.843 und 5.834 mg entsprachen bzw. 1.038 und 1.254 cm³ 0.05-n HCl.

Gefunden: N, 15.00 und 15.05 %.

Berechnet: N, 15.05 %.

Für die Schwefelbestimmung wurde etwa 0.2 g in 50 cm³ 0.2-n NaOH gelöst, mit 5 cm³ Perhydrol versetzt und nach kurzem Stehen langsam zum Sieden erhitzt. Die gebildete Schwefelsäure wurde dann in üblicher Weise als BaSO₄ gewogen.

0.2155 und 0.2218 g Substanz ergaben bzw. 0.2717 und 0.2822 g BaSO₄.

Gefunden: S, 17.3 und 17.4 %.

Berechnet: S, 17.2 %.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 14.

DIE IONENBEWEGLICHKEIT
VON GASIONEN IN KOHLENDIOXYD
BEI HOHEN DRUCKEN

VON

C. B. MADSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Trotz zahlreicher experimenteller und theoretischer Untersuchungen über die Beweglichkeit von Gasionen ist es erst in den letzten Jahren gelungen, die Differenzen zwischen Experiment und Theorie aufzuklären. Nachdem schon lange bekannt war, dass zahlreiche Einflüsse sekundär die Konstitution des Gasions beeinflussen, konnten TYNDALL und POWELL¹⁾ zeigen, dass man die Beweglichkeit des primären Ions nur bei extrem grosser Reinheit des Gases beobachten kann, und dass diese Grösse wirklich mit der von der Theorie geforderten übereinstimmt. Der Einfluss der Verunreinigungen ist so gross, dass es nur gelingt, die Beweglichkeit der primären Ionen zu messen, wenn man bei relativ niedrigen Drucken arbeitet und unter Anwendung von Methoden, die die Messung der Beweglichkeit der Ionen sehr kurze Zeit nach ihrer Entstehung gestatten. Bei Drucken von mehreren Atmosphären, wo die Ionen sich langsam bewegen, sind diese Methoden nicht anwendbar, und man kann nicht hoffen, Resultate zu erhalten, die über die Konstitution des primären Ions etwas aussagen. Das Primäriion kann fremde Moleküle anlagern und so die Bildung von sogenannten Clusterionen bewirken; noch bedeutsamer ist aber der Einfluss, der durch den Übergang der Ladung zu der Verunreinigung kleinster Ionisierungsspannung bei Zusammenstössen entsteht. Er bewirkt, dass man bei hohen Drucken die Be-

¹ Proc. Roy. Soc. A 129, 162, 1930.

weglichkeit eines Ions unbekannter Konstitution im Gas bekannter Zusammensetzung untersucht. Öfters ist auch das Auftreten mehrerer Ionensorten nebeneinander, die sich durch ihre Masse bzw. ihren Radius unterscheiden, festgestellt worden. Trotzdem sind Untersuchungen der Beweglichkeit bei hohen Drucken von grosser praktischer Wichtigkeit, da diese Grösse für die Charakteristik der unselbständigen Entladung von Bedeutung ist. Diese muss wiederum bekannt sein, wenn man sich der Ionisation der Gase hohen Druckes als Hilfsmittel für Untersuchungen von Strahlungen bedienen will. Da insbesondere Kohlensäure von 20—50 Atm. Druck oft für Untersuchungen der Höhenstrahlung benutzt wird, schien es wichtig, unter den entsprechenden Bedingungen die Beweglichkeit von Gasionen in Kohlensäure zu messen. Es wurde dazu eine Apparatur entwickelt, die auch für andere physikalische Messungen anwendbar ist, weshalb sie etwas genauer beschrieben werden soll.

Als Messmethode sollte die Franck-Pohlsche Erweiterung der Rutherfordschen Wechselfeldmethode benutzt werden. Zur Anpassung derselben an die speziellen Bedingungen, die bei hohen Drucken vorliegen, und um grösstmögliche Genauigkeit zu erzielen, wurde eine Apparatur benutzt, die in Abb. 1 wiedergegeben ist. Ein Teil davon dient zur Herstellung rechteckiger Wechselspannung variabler Frequenz.

R_1 , C_1 , G ist eine gewöhnliche Aufstellung zur Anregung von Kippschwingungen einer Glimmlampe G . C_1 und R_1 sind Kapazität bzw. Widerstand hierzu. R_1 hatte einen konstanten Wert von etwa $6 \cdot 10^6$ Ohm. C_1 konnte von 0,001 bis 10 Mikrofarad variiert werden. Die Spannungsvariationen über die Kapazität C_1 werden einem Verstärker zugeführt. Der Verstärker treibt ein Vorrelais, das einen Schrittwähler von der Art, wie sie in einer Fernsprechanlage mit Selbst-

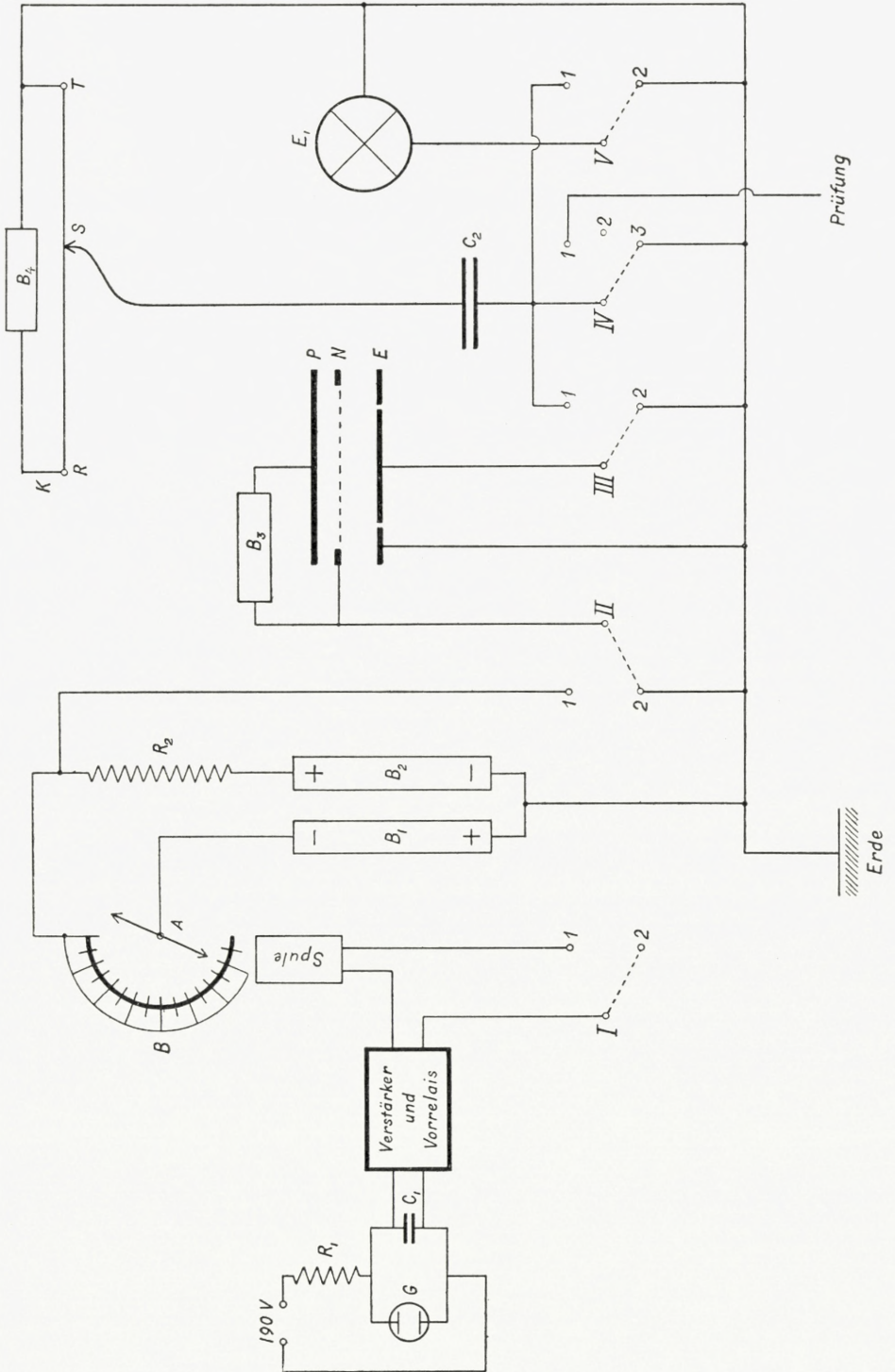


Abb. 1.

anschluss gebraucht werden, regelt. Alle ungeraden Kontakte im Bogen B des Wählers sind verbunden, so dass der rotierende Wählerarm A für die ungeraden Zündungen der Glimmlampe einen Strom schliesst und für die geraden Zündungen den Strom unterbricht. Dieser Strom stammt aus den Spannungsquellen B_1 und B_2 . Ist der Strom unterbrochen, wird die Spannung am oberen Ende des Widerstands R_2 gleich $+B_2$ sein; fliesst aber der Strom, ist sie gleich $\div B_1$. Als Spannungsquellen wurden eine Akkumulatorbatterie bzw. ein Gleichstromsumformer benutzt.

Die Konstanz der Frequenz wurde mit Hilfe eines Spiegeloszillographen untersucht. Bei den Ausmessungen der Oszillogramme zeigte sich, dass die Frequenz innerhalb 1,5 promille konstant war, aber nur, wenn die Glimmlampe mit Batterien getrieben wurde. Die Oszillogramme zeigten auch, dass die Dauer der Halbperioden, abgesehen von einer zu vernachlässigenden Grösse von ungefähr $3 \cdot 10^{-3}$ Sekunden, gleich gross waren.

Die gewöhnliche Bestimmung der Frequenz geschah durch ein Zählerrelais, das mit einem anderen nicht gezeichneten Arm des Wählers verbunden war; für die ungeraden Schritte des Wählers ging der Zähler eine Ziffer nach vorn, gleichzeitig wurde die Zeit mittels einer Stoppuhr gemessen.

Die Messkammer, an die die Wechselfspannungen gelegt wurden, bestand aus zwei ebenen und parallelen Platten P und E (Abb. 1); zwischen ihnen war ein gleichfalls ebenes und paralleles Netz N angebracht. Der Abstand zwischen der oberen Platte P, auf welcher ein Poloniumpräparat von 0,11 Millicurie Stärke angebracht war, und dem Netz war 0,67 cm. Je nach dem Vorzeichen der Spannung B_3 zwischen P und N werden positive oder negative Ionen nach N getrieben. Bei den hier verwendeten höheren Drucken war

die Reichweite der α -Strahlen so herabgesetzt, dass sie nicht durch das Netz in den Raum zwischen N und E hineinfliegen konnten. Die untere Platte war in zwei Teile geteilt, eine zentrale Platte, die mit Bernstein isoliert war und einen Durchmesser von 7,7 cm hatte, und einen sie umgebenden Schutzring, der 3 cm breit war.

Die die untere Elektrode erreichende Ladung wurde dem Kondensator C_2 zugeführt, dessen Ladung mittels des Kompensationsapparats K und des Elektrometers E_1 kompensiert wurde. Je nach der Menge der Ionen wurden die Kapazität C_2 und der Spannungsfall über dem ganzen Draht RT variiert. Die gemessenen Werte wurden dann auf die gemeinsame Kapazität (0,001 Mf.) und Spannung am Draht (1 Volt) umgerechnet. Bei dieser Rechnung wurde auch die eigene Kapazität der Apparatur (160 cm) in Betracht gezogen.

Bei den Messungen musste man darauf achten, dass das Resultat nicht durch Influenzwirkungen der Wechselspannung oder durch Verlust der Ladung des Kondensators gefälscht wurde. Um diese Fehlerquellen auszuschalten, wurden eine Reihe von Umschaltern I, II, III, IV und V eingebaut. Die Wirkungen dieser Umschalter gehen aus folgender Erklärung des Vorgangs einer Messung hervor. Anfangs sind die Umschalter II, III, IV und V geerdet, während der Umschalter I unterbrochen ist. Das heisst, Umschalter I steht auf 2, II auf 2, III auf 2, IV auf 3 und V auf 2. Der Schieber S des Kompensationsapparats steht auf dem rechten Ende T des Drahtes. Nun schaltet man III von 2 auf 1 und IV von 3 auf 2 um. Hierdurch werden die Elektrode E und der Kondensator C_2 verbunden, während ihre Erdverbindungen abgebrochen werden. Auf den isolierten Teilen ist keine Ladung influenziert, weil alles vorher geerdet war.

Darauf wird der Wähler in Betrieb gesetzt, was durch Umlegen des Unterbrechers I nach 1 geschieht. Der Umschalter II wird zur Stellung 1 geführt; hierdurch wird die Verbindung des Netzes zur Erde abgebrochen und die Wechselspannung ans Netz gelegt. Gleichzeitig wird der Strom für das nicht gezeichnete Zählerrelais, das die Zahl der Perioden registriert, geschlossen. Ebenfalls gleichzeitig wird eine Stoppuhr eingeschaltet. Nach Verlauf einer hinreichenden Zeit wird gleichzeitig der Umschalter II zu 2 zurückgeführt, das Zählerrelais und die Stoppuhr ausgeschaltet. Das Netz ist wieder geerdet; auf E und C_2 ist keine Elektrizität influenziert. Gleich darauf wird III zu 2 zurückgeführt, um einen Verlust von Elektrizität durch die ionisierte Luft zwischen N und E zu vermeiden. Der Wähler wird durch Unterbrechung von I ausgeschaltet. Das Elektrometer wird jetzt eingeschaltet, welches mittels des Umschalters V geschieht; der Ausschlag des Elektrometers wird durch Verschiebung von S kompensiert. Die Verschiebung wird abgelesen und rechnerisch behandelt wie oben erwähnt. Schliesslich werden die Umschalter IV und V wieder zur Erde und der Schieber zu T zurückgeführt.

Die Untersuchung der Empfindlichkeit und des Isolationsvermögens des Apparats wird durch das Einstellen der Umschalter IV auf 1 und V auf 1 ermöglicht. Die Umschalter III, IV und V waren Relais mit Bernsteinisolation. Die hierzu gehörenden Unterbrecher und die Umschalter I und II waren in bequemer Weise auf einem Brett angebracht. Die Messungen des Druckes wurden mittels eines gewöhnlichen Federmanometers ausgeführt.

Die Werte, die man bei verschiedenen Periodenzahlen für die Verschiebung bekommt, sind der zur Elektrode E kommenden Elektrizitätsmenge proportional. Durch Division

durch die auf der Stoppuhr gemessene Zeit bekommt man Werte, die q in den folgenden Gleichungen proportional sind. Durch Auftragen dieser Werte als Ordinaten und der Periodenzahlen als Abszissen bekommt man Kurven, von welchen eine in Abb. 3 abgebildet ist.

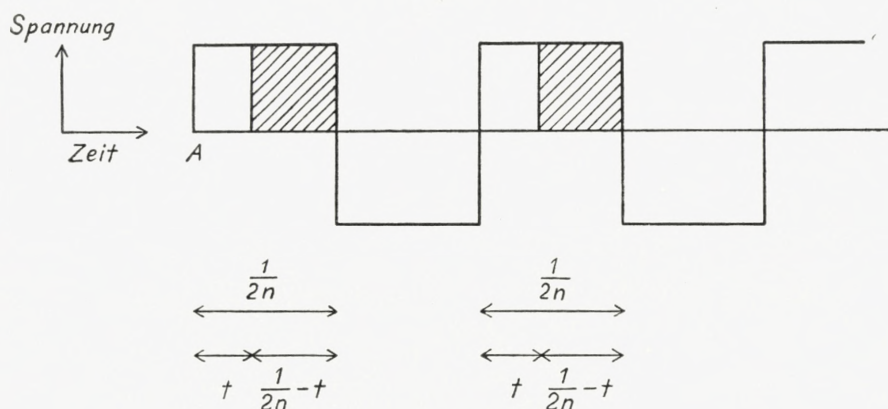


Abb. 2.

Um die zu erwartende Kurvenform zu bestimmen, denkt man sich das Wechselfeld durch ein konstantes Feld von gleicher Stärke wie die Amplitude der »günstigen« Halbperiode des Wechselfeldes — d. h. der Halbperiode, in welcher die Ionen zwischen P und N nach E weiterfliegen können — ersetzt. Es sei a die in der Zeiteinheit bei Gleichspannung zur Elektrometerelektrode geführte Elektrizitätsmenge.

Ist die rechteckige Wechselspannung zwischen N und E angeschlossen, so können die Ionen nur für kurze Zeiträume die Elektrode E erreichen. Dies geht aus Abb. 2 hervor. Zur Zeit A verlassen die Ionen das Netz. Ehe sie die Elektrometerelektrode erreichen, wird eine gewisse Zeit t verlaufen. Von dieser Zeit ab werden die Ionen nach der Elektrometerelektrode strömen, bis ihr Fluss am Ende der günstigen Halbperiode abgebrochen wird. Während der

ungünstigen Halbperiode können keine Ionen die Elektrometerelektrode erreichen. In einer ganzen Periode werden die Ionen also nur während eines (schraffierten) Zeitraumes, der $\left(\frac{1}{2n} - t\right)$ gross ist, von der Elektrometerelektrode aufgenommen. In einer Zeiteinheit, in welcher die Wechselspannung mit der Periodenzahl n angeschlossen ist, muss eine Elektrizitätsmenge von der Grösse

$$q = a \cdot n \left(\frac{1}{2n} - t \right) = \frac{1}{2}a - atn$$

die Elektrometerelektrode erreichen.

Es sei d der Abstand vom Netz zur Elektrometerelektrode, k die Ionenbeweglichkeit und V die angelegte Spannung, dann ist $t = \frac{d^2}{k \cdot V}$, hieraus folgt:

$$q = \frac{1}{2}a - \frac{ad^2}{k \cdot V} \cdot n. \quad (1)$$

Diese Gleichung zeigt, dass q eine lineare Funktion von n ist. Dies gilt aber nur, wenn n so klein ist, dass die Ionen die Elektrometerelektrode erreichen können; ist dagegen dies nicht der Fall, wird natürlich $q = 0$. Die Frequenz, bei welcher die Ionen eben die Elektrometerelektrode erreichen, ist also durch Einführung von $q = 0$ in die obere Gleichung (1) gegeben. Die Bestimmung des Wertes der Ionenbeweglichkeit geschieht dann durch Benutzung der Gleichung:

$$k = \frac{2nd^2}{V}. \quad (2)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Ionisation nur im Raume zwischen dem Netz und der oberen Platte statt-

findet. Bei niedrigen Drucken ist dieses auch mit genügender Annäherung richtig; bei höheren Drucken findet aber besonders wegen der Höhenstrahlung eine merkbare Ionisation in der ganzen Druckkammer statt. Von den in dieser Weise gebildeten Ionen werden nur diejenigen, die im Raume zwischen N und E entstehen, einen Einfluss auf die Messungen ausüben. Wenn man hier mit einer homogenen Ionisierung rechnen darf, ist es klar, dass einige von den durch Höhenstrahlung gebildeten Ionen bei Anlegung der Spannung sogleich die Elektrometerelektrode erreichen können und andere, solange die Spannung angelegt ist, dahin wandern. Sie müssen also einen Beitrag geben zu der Elektrizitätsmenge, die die Elektrometerelektrode sowohl in der günstigen als auch in der ungünstigen Halbperiode aufnimmt. Da die Spannung der ungünstigen Halbperiode grösser als die der günstigen gewählt werden musste, um eine vollständige Zurücktreibung der Ionen durch das Netz zu sichern, wird wegen der nicht zu erreichenden Sättigung ein Überschuss von Höhenstrahlungsionen mit dem Vorzeichen der ungünstigen Spannung nach der Elektrometerelektrode kommen. Aber dieser Effekt ist von der Periodenzahl unabhängig und bewirkt deshalb nur eine Verschiebung der $n-q$ Kurve parallel zur q -Achse. Die Linie $q = 0$ muss darum durch eine Linie $q = C$ und die Gleichung (1) $q = f(n)$ durch eine Gleichung $q = f(n) + C$ ersetzt werden. In der obigen Formel der Beweglichkeit (2) soll für n der Wert des Schnittpunktes der verschobenen Nulllinie und der schrägen Geraden eingeführt werden.

Man denke sich, dass z. B. zwei Ionenarten vorhanden sind; dieses wird bewirken, dass man zwei Schnittpunkte bekommt. Erstens — für die Ionen, die am schnellsten sind — den Schnittpunkt der verschobenen Nulllinie und der am

wenigsten schrägen Geraden. Zweitens — für die langsameren Ionen — den Schnittpunkt der zwei schrägen Geraden (vgl. Abb. 3).

Abbildung 3 stellt die Messungen mit positiven Ionen beim Druck 18,5 Atm. vor. Man sieht, dass die Kurve zwei

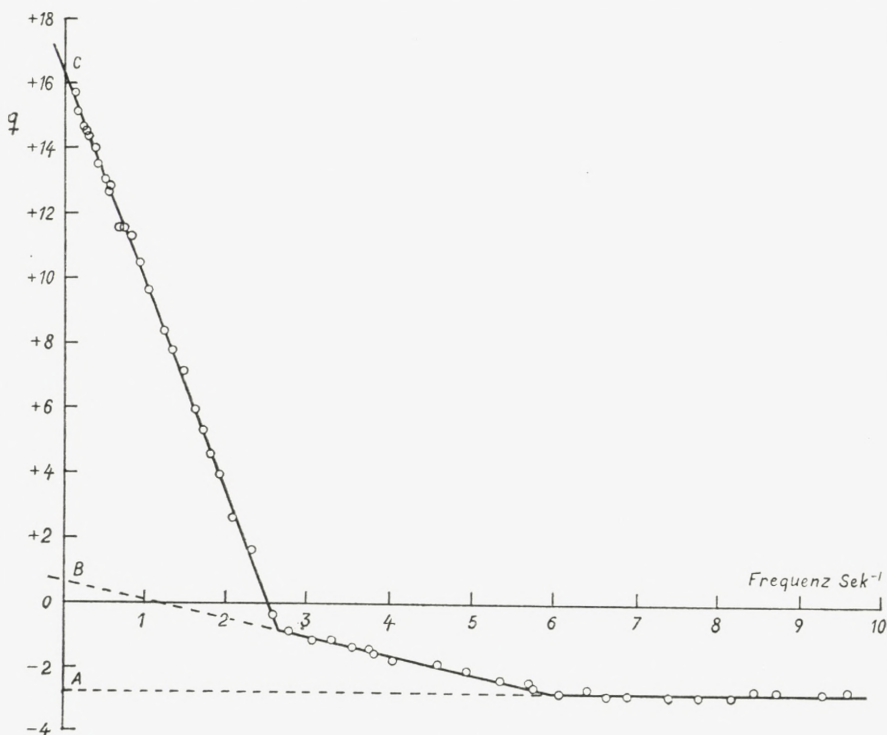


Abb. 3.

Knickpunkte besitzt. Wie oben erwähnt bedeutet dies, dass zwei Ionenarten vorhanden sind. Die Frequenzen, bei welchen die Ionen eben die Elektrometerelektrode erreichen, sind — für die schnellen Ionen — $n_1 = 6,0$ und — für die langsamen — $n_2 = 2,64$. Diese Werte werden in Formel (2) eingesetzt. Der Wert von d war dabei 1,87 cm. Für den Zahlenwert von V muss aber wegen des Durchgriffs eine Korrektur angebracht werden.

Um sie auszuführen muss man den Durchgriff kennen.

Die Ionisationskammer ist einer Dreielektrodenröhre sehr ähnlich. Die obere Platte entspricht der Kathode, die Elektrometerelektrode der Anode und das Netz dem Gitter. Der Durchgriff wurde in der üblichen Weise durch Aufnahme von zwei Gitterspannungs-Anodenstromscharakteristiken mit verschiedener Anodenspannung bestimmt. Weil man bei höheren Drucken arbeitet, ist keine Sättigung vorhanden. Dies bewirkt, dass die Charakteristik, die man bei einer höheren Spannung bekommt, nicht nur — wie es bei den Dreielektrodenröhren der Fall ist — eine parallele Verschiebung der Charakteristik bei niedrigerer Anodenspannung ergibt, sondern dass die Steilheit dieser ersten Charakteristik ein wenig grösser ist als die der letzteren. Der analoge Fall bei einer Dreielektrodenröhre wäre eine Erhöhung des Heizstromes. Der Durchgriff lässt sich deshalb nur mit einer mässigen Genauigkeit bestimmen. Da der Durchgriff aber als ein additives Glied in den Wert der Spannung eingeht, wird der Einfluss dieser Ungenauigkeit verkleinert. Der Wert des Durchgriffes ergab sich zu $10 \pm 1\%$. Ist, wie in dem vorliegenden Beispiele, die Spannung Netz-obere Platte 70 Volt, die Spannung Netz-Elektrometerelektrode 525 Volt, muss also für V der Wert 584,5 Volt eingesetzt werden.

Die erhaltenen Resultate sind sämtlich in der Tabelle aufgeführt. Man sieht, dass für die positiven Ionen zwei Werte angegeben sind entsprechend den zwei Arten von Ionen. Dagegen ist nur eine Art von negativen Ionen sicher gefunden.

In der Tabelle ist auch das Produkt Druck mal Beweglichkeit aufgeführt; man sieht, dass dieses Produkt nicht konstant ist, sondern mit anwachsendem Druck sinkt. Wegen der Abweichungen des Kohlendioxyds vom idealen Gasgesetz, wird man in Übereinstimmung mit der theore-

Tabelle.

	Druck p Atm.	Beweg- lichkeit k cm/sec pr. Volt/cm	Pro- dukt p · k	Dichte ρ	Pro- dukt ρ · k	% der von den Ionen getrage- nen La- dung	Ver- hältnis $\frac{k_1^+}{k_2^+}$
	1	2	3	4	5	6	7
Schnelle positive Ionen	14,5	k_1^+ *)					
	15,5	*)					
	18,5	0,0707	1,31	19,7	1,39	19,2	2,19
	21,3	0,0539	1,15	23,3	1,26	18,9	2,07
	26,5	0,0407	1,08	30,5	1,24	25,0	2,01
	28,5	0,0411	1,17	33,3	1,37	18,9	2,16
	32,0	0,0333	1,06	38,3	1,28	21,3	1,95
	38,0	0,0236	0,90	48,3	1,14	21,3	1,79
	41,5	0,0215	0,87	54,7	1,18	18,2	1,96
	44,0	0,0209	0,92	60,0	1,25	12,4	2,01
	51,0	0,0151	0,77	75,7	1,14	15,8	1,91
Langsame positive Ionen	14,5	k_2^+				*)	
	15,5	0,0377	0,55	16,2	0,61	*)	
	18,5	0,0324	0,60	19,7	0,64	80,8	
	21,3	0,0260	0,55	23,3	0,60	81,1	
	26,5	0,0203	0,54	30,5	0,62	75,0	
	28,5	0,0190	0,54	33,3	0,63	81,1	
	32,0	0,0171	0,55	38,3	0,65	78,7	
	38,0	0,0132	0,50	48,3	0,64	78,7	
	41,5	0,0110	0,45	54,7	0,60	81,8	
	44,0	0,0104	0,46	60,0	0,62	87,6	
	51,0	0,0079	0,40	75,7	0,59	84,2	
Negative Ionen	15,0	0,0394	0,59	15,5	0,61	100	
	21,7	0,0275	0,60	23,5	0,65	100	
	26,5	0,0226	0,60	30,2	0,68	100	
	31,0	0,0173	0,54	36,5	0,63	100	
	35,5	0,0170	0,60	43,8	0,74	100	
	39,5	0,0138	0,55	49,0	0,68	100	
	42,5	0,0108	0,45	56,8	0,61	100	
	46,5	0,0101	0,46	64,1	0,64	100	
	48,5	0,0096	0,47	69,0	0,66	100	

*) Da der Wähler nicht die zur Bestimmung dieser Werte erforderliche Geschwindigkeit erreichen konnte, war es nicht möglich, die Beweglichkeiten der schnellen Ionen bei diesen Drucken zu messen. Das Vorhandensein der schnellen Ionen bei diesen Drucken ist aber dadurch gesichert, dass man bei der graphischen Darstellung zwei schräge Geraden bekommt; dagegen fehlt die verschobene Nulllinie.

tischen Erwartung prüfen, ob das Produkt Dichte mal Beweglichkeit eine bessere Konstanz aufweist. Die Dichte ρ des Kohlendioxyds ist deshalb nach den Amagatschen Messungen¹⁾ berechnet. Als Einheit ist die Dichte des Kohlendioxyds bei 20° C. (etwa Zimmertemperatur) und 1 Atm. benutzt. Die Werte des Produktes stehen in Kolonne 5. Sie zeigen in der Tat innerhalb der Versuchsfehler eine Konstanz. Es ist auch versucht worden, die weniger genauen Messungen von KOVARIK, die in dem Druckbereich von 10—50 Atm. ausgeführt sind, in dieser Weise zu behandeln. Während KOVARIK²⁾ für das Produkt $p \cdot k$ Werte gefunden hat, die ungefähr zwischen 0,50 und 0,75 liegen, liegt das Produkt $\rho \cdot k$ ungefähr zwischen 0,75 und 0,90. Die Resultate, die verschiedene Autoren³⁾ in Luft verschiedenen Drucks gefunden haben, scheinen gleichfalls eine bessere Übereinstimmung mit $\rho \cdot k = \text{konstant}$ als mit $p \cdot k = \text{konstant}$ zu zeigen.

Bei Verlängerung der verschobenen Nulllinie und der schrägen Geraden in Abb. 3 wird die Ordinatenachse in A und B und C geschnitten. Die Länge von AB ist der von den schnellen und die Länge von BC der von den langsamen Ionen getragenen Elektrizitätsmenge proportional. In Kolonne 6 sind die in dieser Weise bestimmten Prozentzahlen aufgeführt. In Kolonne 7 ist das Verhältnis der Beweglichkeiten der schnellen und langsamen positiven Ionen angegeben.

Es zeigt sich, dass unter den gewählten Versuchsbedingungen zwei Arten von positiven Ionen, aber nur eine Art von negativen Ionen vorhanden sind. Um zu entscheiden,

¹⁾ »Hütte«, 26. Aufl. Bd. I. S. 548.

²⁾ Proc. Roy. Soc. 86, 154, 1912.

³⁾ Phys. Rev. 30, 415, 1910; Phys. Rev. 34, 53, 1912.

ob die schnelleren Ionen einer gröberen Verunreinigung ihre Entstehung verdanken, wurde versucht, durch Trocknung der Kohlensäure mit P_2O_5 den Wasserdampf zu entfernen. Das benutzte Kohlendioxyd enthält etwa 1 % Verunreinigungen, wovon der Wasserdampf einen grossen Anteil ausmacht. Die Entfernung der Hauptmenge des Wassers durch das Trockenmittel hatte aber keinen Einfluss auf den Prozentsatz der schnelleren Ionensorte. Eine Reinigung im Sinne der Versuche von Tyndall und Powell konnte, wie schon in der Einleitung erwähnt, bei den hohen Gasdrucken nicht angestrebt werden. Sie wäre auch zwecklos, da die Kohlensäure selbst sich unter der Einwirkung der α -Strahlen teilweise zersetzt. Der Hauptteil der Ionen, der die kleinere Beweglichkeit zeigte, ist derjenige, der auch bei den bisherigen Messungen in Kohlensäure beobachtet wurde, denn bei Rückrechnung auf den Druck von 1 Atm. stimmen die hier beobachteten Werte mit denen aus der älteren Literatur überein. Aus der geringen Veränderung des Prozentsatzes der schnellen Ionen zwischen ungefähr 15 und 50 Atm. Druck wird man zu schliessen haben, dass ein entsprechender Anteil auch bei Atmosphärendruck vorhanden ist. Dass er bisher nicht beobachtet wurde, liegt wohl an der geringeren Genauigkeit der älteren Bestimmungen. Eine eindeutige Erklärung der beiden positiven Ionensorten ist, wie aus der Einleitung hervorgeht, nicht möglich, da sowohl ein verschiedener Ionenradius, wie verschiedene Ionenmasse in Frage kommt.

Da Gase gleichen Reinheitsgrades für die Druckkammern bei Messungen der durchdringenden Höhenstrahlung benutzt werden, wird man für Fragen der Stromspannungscharakteristik auch mit den in dieser Arbeit bestimmten Beweglichkeiten zu rechnen haben.

Zusammenfassung.

Die Beweglichkeiten von Gasionen in Kohlensäure werden mittels der Wechselfeldmethode bei Drucken zwischen ungefähr 15 und 50 Atm. gemessen. Es stellt sich heraus, dass zwei Arten von positiven Ionen mit einem Beweglichkeitsverhältnis 2:1 und in einem innerhalb des oben angeführten Druckintervalles annähernd konstanten Mengenverhältnis vorhanden sind; dagegen nur eine Art von negativen. An Stelle des für ideale Gase geltenden Gesetzes $\text{Druck} \times \text{Beweglichkeit} = \text{konstant}$ gilt bei Kohlensäure, wie es theoretisch zu erwarten ist, das Gesetz $\text{Dichte} \times \text{Beweglichkeit} = \text{konstant}$.

Die Arbeit wurde in »Institut for teoretisk Fysik«, Kopenhagen begonnen und in »Aarhus Universitets fysiske Institut« beendet. Herrn Prof. Dr. N. Bohr und Herrn Prof. Dr. Buch Andersen möchte ich meinen herzlichen Dank sagen für die Ermöglichung der Benutzung der Hilfsmittel ihrer Institute.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 15.

THE ORIGINAL ORBIT OF
COMET 1904 I (BROOKS)

BY

ERIK SINDING



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In Publ. of the Copenhagen Observatory No. 98 the result of a determination of the original orbit of Comet 1907 I (GIACOBINI), according to the principles set out by Prof. E. STRÖMGREN, has been given. The result was similar to those obtained in all other cases treated according to the principles referred to (cfr. the references given at the end of this paper): the hyperbolicity of the orbit turned out to be illusory.

The result of an investigation of the original orbit of Comet 1904 I (BROOKS) is given hereafter.

A definitive orbit of this comet has been published by S. KASAKOV [Détermination de l'orbite définitive de la Comète 1904 I (Moscow Annals 8, 1)]. The determination of the orbit was based upon 1216 observations distributed over a period of $13\frac{2}{3}$ months, so that the orbit is among the most accurate yet determined, a fact that is also evident from the very small mean errors of the elements given on p. 55 of the paper quoted.

The elements as found by KASAKOV are given hereafter, together with their mean errors (l. c. p. 55—56):

Comet 1904 I (BROOKS).

Osculation 1904 May 3.0 mean time Berlin (day beginning at noon).

$T = 1904$ March 7.17596 mean time Berlin (day beginning at noon).

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 53^{\circ} 32' 31''.05 \pm 1''.93 \\ \Omega = 275 47 25.38 \pm 0.52 \\ i = 125 7 42.52 \pm 0.42 \end{array} \right\} 1904.0 \left. \begin{array}{l} q = 2.707778 \pm 0.000014 \\ e = 1.0013646 \pm 0.0000216 \\ \frac{1}{a} = -0.0005040 \pm 0.0000079 \end{array} \right\} (1)$$

Reducing to 1950.0 and expressing the perihelion time in Greenwich mean time, we find:

$T = 1904$ March 7.13875 mean time Greenwich (day beginning at noon).

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 53.53476 \\ \Omega = 276.42848 \\ i = 125.12972 \end{array} \right\} 1950.0 \quad q, e \text{ and } \frac{1}{a} \text{ as given above.} \quad (2)$$

The corresponding equatorial constants are as follows:

$$\left. \begin{array}{l} P_x = -0.3933174 \quad P_y = -0.8510704 \quad P_z = +0.3478228 \\ Q_x = -0.4298901 \quad Q_y = +0.5046490 \quad Q_z = +0.7486815 \end{array} \right\} 1950.0. \quad (3)$$

The orbit was traced backwards through an interval of 14 years by direct numerical integration of rectangular co-ordinates. The attractions by the Sun, Jupiter and Saturn were taken into account. The planetary co-ordinates and the accelerations of the Sun were taken from COMRIE: Planetary Co-ordinates. The calculation was carried out to 7 decimal places.

Perturbed equatorial Co-ordinates
of Comet 1904 I.

			<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
1904	July	18.5	−1.747443	−1.071532	+ 2.241205
	June	28.5	1.666452	1.280345	2.070957
	„	8.5	1.577793	1.483248	1.891180
	May	19.5	1.481292	1.678759	1.702004
	Apr.	29.5	1.376926	1.865338	1.503792
	„	9.5	1.264856	2.041464	1.297166
	Mar.	20.5	1.145443	2.205724	1.083009
	Feb.	29.5	1.019244	2.356904	0.862434
	„	9.5	0.886988	2.494078	0.636731
	Jan.	20.5	0.749538	2.616653	0.407295
1903	Dec.	31.5	0.607837	2.724399	+ 0.175541
	„	11.5	0.462846	2.817430	−0.057172
	Nov.	21.5	0.315499	2.896160	0.289609
	„	1.5	0.166656	2.961242	0.520695
	Oct.	12.5	−0.017083	3.013493	0.749540
	Sep.	22.5	+ 0.132567	3.053835	0.975435
	„	2.5	0.281749	3.083231	1.197847
	Aug.	13.5	0.430027	3.102647	1.416394
	July	24.5	0.577059	3.113016	1.630821
	„	4.5	0.722586	3.115219	1.840980
	June	14.5	0.866415	3.110074	2.046805
	May	25.5	1.008414	3.098329	2.248294
	„	5.5	1.148493	3.080664	2.445494
	Apr.	15.5	1.286601	3.057691	2.638485
	Mar.	26.5	1.422714	3.029956	2.827372
	„	6.5	1.556829	2.997950	3.012277
	Feb.	14.5	1.688961	2.962109	3.193331
	Jan.	25.5	1.819136	2.922822	3.370671
	„	5.5	+ 1.947391	−2.880436	−3.544436

			x	y	z
1902	Dec.	16.5	+ 2.073767	— 2.835258	— 3.714764
	Nov.	26.5	2.198310	2.787564	3.881792
	„	6.5	2.321068	2.737600	4.045653
	Oct.	17.5	2.442092	2.685583	4.206475
	Sep.	7.5	2.679141	2.576158	4.519494
	July	29.5	2.909857	2.460622	4.821780
	June	19.5	3.134631	2.340053	5.114182
	May	10.5	3.353833	2.215321	5.397470
	Mar.	31.5	3.567809	2.087136	5.672334
	Feb.	19.5	3.776884	1.956083	5.939397
	Jan.	10.5	3.981356	1.822644	6.199219
1901	Dec.	1.5	4.181501	1.687220	6.452302
	Oct.	22.5	4.377573	1.550147	6.699100
	Sep.	12.5	4.569805	1.411707	6.940022
	Aug.	3.5	4.758412	1.272139	7.175438
	June	24.5	4.943592	1.131643	7.405685
	May	15.5	5.125526	0.990394	7.631068
	Apr.	5.5	5.304384	0.848537	7.851864
	Feb.	24.5	5.480318	0.706200	8.068331
	Jan.	15.5	5.653474	0.563491	8.280700
1900	Dec.	6.5	5.823983	0.420505	8.489185
	Oct.	27.5	5.991970	0.277323	8.693985
	Sep.	17.5	6.157549	— 0.134016	8.895282
	Aug.	8.5	6.320826	+ 0.009356	9.093242
	June	29.5	6.481901	0.152738	9.288023
	May	20.5	6.640867	0.296084	9.479769
	Apr.	10.5	6.797810	0.439353	9.668614
	Mar.	1.5	6.952813	0.582509	9.854684
	Jan.	20.5	7.105951	0.725522	10.038095
1899	Dec.	11.5	+ 7.257296	+ 0.868362	— 10.218957

			x	y	z
1899	Sep.	22.5	+ 7.554874	+ 1.153436	- 10.573435
	July	4.5	7.846038	1.437573	10.918864
	Apr.	15.5	8.131229	1.720649	11.255900
	Jan.	25.5	8.410840	2.002573	11.585130
1898	Nov.	6.5	8.685224	2.283273	11.907075
	Aug.	18.5	8.954699	2.562695	12.222204
	May	30.5	9.219553	2.840800	12.530939
	Mar.	11.5	9.480048	3.117560	12.833662
1897	Dec.	21.5	9.736420	3.392955	13.130720
	Oct.	2.5	9.988888	3.666973	13.422428
	Apr.	25.5	10.482885	4.210850	13.990925
1896	Nov.	16.5	10.963439	4.749186	14.541187
	June	9.5	11.431734	5.282023	15.074942
	Jan.	1.5	11.888775	5.809432	15.593668
1895	July	25.5	12.335424	6.331511	16.098642
	Feb.	15.5	12.772420	6.848373	16.590973
1894	Sep.	8.5	13.200398	7.360145	17.071628
	Apr.	1.5	13.619913	7.866968	17.541456
1893	Oct.	23.5	14.031444	8.368996	18.001203
	May	16.5	14.435421	8.866397	18.451527
1892	Dec.	7.5	14.832231	9.359350	18.893008
	June	30.5	15.222232	9.848042	19.326163
	Jan.	22.5	15.605762	10.332665	19.751451
1891	Aug.	15.5	15.983147	10.813409	20.169289
	Mar.	8.5	16.354706	11.290458	20.580050
1890	Sep.	29.5	16.720748	11.763980	20.984080
	Apr.	22.5	+ 17.081578	+ 12.234130	- 21.381700

Perturbed equatorial co-ordinates and velocities x , y , z and $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ for 1891 March 8.5 are given in the following.

The reductions ξ , η , ζ and $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ to the centre of gravity of the system Sun-Jupiter-Saturn are also given, together with co-ordinates and velocities \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , $\frac{d\bar{x}}{dt}$, $\frac{d\bar{y}}{dt}$, $\frac{d\bar{z}}{dt}$ referred to the said centre of gravity:

$$\left. \begin{array}{lll} x = +16.354706 & y = +11.290458 & z = -20.580050 \\ \xi = - & 1463 & \eta = + & 1715 & \zeta = + & 733 \\ \bar{x} = +16.353243 & \bar{y} = +11.292173 & \bar{z} = -20.579317 \end{array} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{array}{lll} 160 \frac{dx}{dt} = -0.3687499 & 160 \frac{dy}{dt} = -0.4752584 & 160 \frac{dz}{dt} = +0.4073408 \\ 160 \frac{d\xi}{dt} = - & 5243 & 160 \frac{d\eta}{dt} = - & 7211 & 160 \frac{d\zeta}{dt} = - & 3016 \\ 160 \frac{d\bar{x}}{dt} = -0.3692742 & 160 \frac{d\bar{y}}{dt} = -0.4759795 & 160 \frac{d\bar{z}}{dt} = +0.4070392 \end{array} \right\} (5)$$

The reciprocal semi-major-axis $\frac{1}{a}$ is calculated from these values by means of the following equation:

$$V^2 = w^2 k^2 (1 + \Sigma m) \left[\frac{2}{\bar{r}} - \frac{1}{a} \right]$$

or:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\bar{r}} - \frac{V^2}{w^2 k^2 (1 + \Sigma m)}$$

The result is as follows:

$$\frac{1}{a} = +0.0002165. \quad (6)$$

An upper limit to the perturbation in $\frac{1}{a}$ due to the action of Jupiter and Saturn before 1891 March 8.5 can be obtained by means of Publ. of the Copenhagen Observatory No. 19, equation (33). In this way it is easily shown, that

the character of the orbit can not have changed during the interval of time prior to 1891 March 8.5, which is not covered by the numerical integrations of the present investigation.

The final result then is: *While the osculating orbits of Comet 1904 I (BROOKS) for dates of osculation near the time of perihelion were decidedly hyperbolic, the original orbit as determined by integration backwards was decidedly elliptic.*

University Observatory,
Copenhagen 1935 Sept.

ERIK SINDING.

References.

1. E. STRÖMGREN: Über den Ursprung der Kometen (Publ. of the Copenhagen Obs. No. 19, reprinted from Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter 7, XI, 4).
2. K. BÜTTNER: Die Bahn des Kometen 1853 III (Ergänzungsheft zu den Astronomischen Nachrichten 4, I).
3. KR. LOUS: Die ursprüngliche Bahn des Kometen 1910 a (Publ. of the Copenhagen Obs. No. 44, reprinted from Astronomische Nachrichten No. 5267).
4. MICHAILOV: Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1905 VI und Untersuchung seiner früheren Bewegung (Russian Astronomical Journal I, 1).
5. G. VAN BIESBROECK: Definitive orbit of Comet Delavan [1913 f = 1914 V] (Publications of the Yerkes Observatory Vol. V, part II).
6. G. VAN BIESBROECK: Definitive orbit of Comet Van Biesbroeck [1925 j = 1925 VII] (The Astronomical Journal No. 958).
7. S. KASAKOV: Détermination de l'orbite définitive de la Comète 1904 I (Moscow Annals 8, 1).
8. E. STRÖMGREN und H. Q. RASMUSEN: Über die ursprüngliche Bahn des Kometen 1907 I [Giacobini] (Publ. of the Copenhagen Obs. No. 98, reprinted from Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs mathematisk-fysiske Meddelelser XIII, 2).



Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 16.

THE ORBIT OF COMET 1929 I
(SCHWASSMANN-WACHMANN) IN THE
YEARS 1920—1936

BY

HANS Q. RASMUSEN

WITH 1 FIGURE



KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

The following revision of the orbit of comet 1929 I is based on the elements computed by Dr. S. KANDA (T. A. B. 41—42). These elements are as follows:

$$\begin{aligned}
 T &= 1929 \text{ March } 23.25926 \text{ U. T.} \\
 \omega &= 357.76403 \\
 \Omega &= 126.32592 \\
 i &= 3.72893 \\
 e &= 0.3950135 \\
 a &= 3.455363 \\
 \mu &= 0.1534488
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} 1950.0 \tag{I}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -1.936 \ 9388 (\cos E - e) - 2.623 \ 4602 \sin E \\
 y &= +2.628 \ 6605 (\cos E - e) - 1.710 \ 7396 \sin E \\
 z &= +1.130 \ 4612 (\cos E - e) - 0.517 \ 0711 \sin E
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ y \\ z \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

From these elements I have computed the perturbed co-ordinates of the comet from 1929 to 1935 (A. N. 6069 and Copenhagen Observatory Publ. 102).

The comet was rediscovered by Professor VAN BIESBROECK on 1934 Dec. 11. A comparison with the ephemeris gave the following residuals:

$$\Delta \alpha \cos \delta = +150^s, \Delta \delta = +780''.$$

From the above mentioned computation I found for 1934 Dec. 11.11181 U. T. the following approximate per-

turbations as differences between the perturbed and unperturbed co-ordinates:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= +0.04978 \\ \eta &= -0.01415 \\ \zeta &= -0.00832 \end{aligned} \right\} 1950.0$$

From these perturbations and the following observations:¹

U. T.							
1929 Febr.	1.0	5 ^h 38 ^m 15 ^s .04	+21°10' 4''3	} Normal place Nr. 1 (20 obs.)			
1929 March 31.0	6 35 54.50	+23 14 36.1	} Normal place Nr. 2 (7 obs.)				
1934 Dec. 11.11181	1 43 24.31	+ 5 21 31.7		Yerkes			

and using the method of the variation of the geocentric distances for the times 1929 Febr. 1.0 and 1929 March 31.0 I have computed the following revised elements:

Epoch and osculation: 1929 Febr. 18.0 U. T.

$$\left. \begin{aligned} M &= 354.90992 \\ \omega &= 357.71314 \\ \Omega &= 126.32675 \\ i &= 3.72833 \\ e &= 0.3945110 \\ a &= 3.452618 \\ \mu &= 0.1536318 \end{aligned} \right\} 1950.0 \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -1.932\ 906 (\cos E - e) - 2.623\ 552 \sin E \\ y &= +2.628\ 200 (\cos E - e) - 1.707\ 662 \sin E \\ z &= +1.130\ 052 (\cos E - e) - 0.515\ 907 \sin E \end{aligned} \right\} 1950.0$$

¹) All the observations and normal places are referred to the equinox for the beginning of the year of observation.

Using these elements I have repeated the computation of perturbed equatorial co-ordinates from 1929 to 1936 (7 figure computation; the perturbations from Jupiter and Saturn are considered; attention has been paid to an essential part of the effect of the planets Merkur, Venus, Earth through the use of the value $k^2 = 0.0002959139$ which corresponds to the sum of the masses of these three planets and the Sun). The co-ordinates are:

		Equinox 1950.0.					
U. T.		x		y		z	
1929	Jan.	19.0	— 0.378 379	+ 1.958 404	+ 0.782 292		
	—	29.0	0.509 634	1.915 575	0.773 037		
	Febr.	8.0	0.639 322	1.866 864	0.761 408		
	—	18.0	0.767 011	1.812 317	0.747 398		
	—	28.0	0.892 266	1.752 025	0.731 020		
	March	10.0	1.014 662	1.686 120	0.712 299		
	—	20.0	1.133 782	1.614 774	0.691 279		
	—	30.0	1.249 234	1.538 202	0.668 023		
	April	9.0	1.360 644	1.456 654	0.642 605		
	—	19.0	1.467 675	1.370 416	0.615 119		
	—	29.0	1.570 019	1.279 802	0.585 668		
	May	9.0	1.667 411	1.185 149	0.554 370		
	—	19.0	1.759 623	1.086 814	0.521 348		
	—	29.0	1.846 473	0.985 164	0.486 737		
	June	8.0	1.927 818	0.880 575	0.450 674		
	—	18.0	2.003 559	0.773 424	0.413 300		
	July	8.0	2.138 026	0.552 921	0.335 185		
	—	28.0	2.249 826	0.326 524	0.253 504		
	Aug.	17.0	2.339 409	+ 0.096 870	0.169 307		
	Sept.	6.0	2.407 610	— 0.133 698	+ 0.083 550		
	—	26.0	2.455 536	0.363 170	— 0.002 921		
	Oct.	16.0	2.484 466	0.589 859	0.089 380		
	Nov.	5.0	2.495 769	0.812 388	0.175 215		
	—	25.0	2.490 840	1.029 655	0.259 919		
	Dec.	15.0	— 2.471 056	— 1.240 804	— 0.343 081		

		Equinox 1950.0.						
U. T.		x		y		z		
1930	Jan.	4.0	-2.437	745	-1.445	179	-0.424	373
	—	24.0	2.392	165	1.642	298	0.503	536
	Febr.	13.0	2.335	491	1.831	818	0.580	371
	March	5.0	2.268	818	2.013	511	0.654	727
	—	25.0	2.193	152	2.187	237	0.726	493
	April	14.0	2.109	418	2.352	931	0.795	592
	May	4.0	2.018	461	2.510	582	0.861	973
	—	24.0	1.921	056	2.660	225	0.925	605
<hr/>								
	July	3.0	1.709	660	2.935	782	1.044	583
	Aug.	12.0	1.480	167	3.180	412	1.152	561
	Sept.	21.0	1.236	696	3.395	151	1.249	711
	Oct.	31.0	0.982	700	3.581	143	1.336	284
	Dec.	10.0	0.721	095	3.739	562	1.412	571
1931	Jan.	19.0	0.454	363	3.871	572	1.478	884
	Febr.	28.0	-0.184	633	3.978	295	1.535	541
	April	9.0	+0.086	246	4.060	803	1.582	852
	May	19.0	0.356	654	4.120	108	1.621	122
	June	28.0	0.625	155	4.157	161	1.650	636
	Aug.	7.0	0.890	461	4.172	854	1.671	672
	Sept.	16.0	1.151	403	4.168	024	1.684	486
	Oct.	26.0	1.406	905	4.143	453	1.689	324
	Dec.	5.0	1.655	967	4.099	880	1.686	415
1932	Jan.	14.0	1.897	644	4.037	999	1.675	976
	Febr.	23.0	2.131	036	3.958	464	1.658	211
	April	3.0	2.355	269	3.861	902	1.633	314
	May	13.0	2.569	489	3.748	909	1.601	467
	June	22.0	2.772	848	3.620	060	1.562	848
	Aug.	1.0	2.964	497	3.475	916	1.517	626
	Sept.	10.0	3.143	574	3.317	026	1.465	966
	Oct.	20.0	3.309	196	3.143	936	1.408	030
	Nov.	29.0	3.460	452	2.957	196	1.343	981
1933	Jan.	8.0	3.596	392	2.757	367	1.273	983
	Febr.	17.0	3.716	016	2.545	031	1.198	206
	March	29.0	3.818	266	2.320	800	1.116	828
	May	8.0	+3.902	018	-2.085	329	-1.030	041

Equinox 1950.0.

U. T.		x		y		z	
1933	June	17.0	+ 3.966 066	- 1.839 335	- 0.938 055		
	July	27.0	4.009 110	1.583 610	0.841 105		
	Sept.	5.0	4.029 748	1.319 045	0.739 457		
	Oct.	15.0	4.026 457	1.046 662	0.633 424		
	Nov.	24.0	3.997 585	0.767 647	0.523 373		
1934	Jan.	3.0	3.941 330	0.483 397	0.409 746		
	Febr.	12.0	3,855 738	- 0.195 576	0.293 078		
	March	24.0	3.738 689	+ 0.093 806	0.174 033		
	May	3.0	3.587 908	0.382 297	- 0.053 435		
	June	12.0	3.400 977	0.666 878	+ 0.067 680		
	July	2.0	3.293 176	0.806 566	0.128 033		
	—	22.0	3.175 397	0.943 805	0.187 997		
	Aug.	11.0	3.047 332	1.077 981	0.247 349		
	—	31.0	2.908 684	1.208 406	0.305 840		
	Sept.	20.0	2.759 176	1.334 310	0.363 185		
	Oct.	10.0	2.598 564	1.454 836	0.419 065		
	—	30.0	2.426 653	1.569 022	0.473 118		
	Nov.	19.0	2.243 310	1.675 802	0.524 937		
	Dec.	9.0	2.048 496	1.773 996	0.574 065		
	—	29.0	1.842 288	1.862 301	0.619 992		
1935	Jan.	18.0	1.624 919	1.939 298	0.662 153		
	Febr.	7.0	1.396 820	2.003 455	0.699 928		
	—	27.0	1.158 666	2.053 147	0.732 648		
	March	19.0	0.911 427	2.086 688	0.759 604		
	April	8.0	0.656 422	2.102 377	0.780 058		
	—	28.0	0.395 363	2.098 570	0.793 278		
	May	18.0	+ 0.130 383	2.073 775	0.798 562		
	June	7.0	- 0.135 962	2.026 760	0.795 289		
	—	27.0	0.400 729	1.956 679	0.782 962		
	July	17.0	0.660 677	1.863 191	0.761 268		
	Aug.	6.0	0.912 399	1.746 560	0.730 117		
	—	26.0	1.152 498	1.607 708	0.689 676		
	Sept.	15.0	1.377 792	1.448 207	0.640 378		
	Oct.	5.0	1.585 496	1.270 207	0.582 899		
	—	25.0	- 1.773 376	+ 1.076 307	+ 0.518 126		

From these co-ordinates α and δ have been found through interpolation and reduction to the equinox for the beginning of the year of observation, and the following residuals were found:

	U. T.		$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	
1934	Dec.	11.11181	— 12 ^s 73	— 65 ^{''} 2	Yerkes
—	—	11.17500	— 12.87	— 67.2	»
—	—	12.10558	— 12.75	— 65.9	»
1935	Febr.	6.80389	— 11.01	— 60.9	Bergedorf
—	—	6.84194	— 12.03	— 67.1	»
—	March	5.80424	— 11.64	— 62.5	»

which led to the normal places:

	U. T.				
1934	Dec. 12.0	1 ^h 43 ^m 14 ^s 64+5°22' 9 ^{''} 6	Normal place	Nr. 3	
1935	Febr. 7.0	2 11 57.78+9 37 36.1	—	—	- 4

Comparison with all the normal places gave the result:

		U. T.		$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
Normal place	Nr. 1	1929 Febr.	1.0	— 0 ^s 20	— 0 ^{''} 5
—	—	- 2 1929 March	31.0	+ 0.17	— 0.2
—	—	- 3 1934 Dec.	12.0	— 12.79	— 66.1
—	—	- 4 1935 Febr.	7.0	— 11.43	— 62.5

As the large residuals in 1934 and 1935 presumably arise from the inaccuracy of the perturbations used for the revision I have computed new perturbations for 1934 Dec. 11 from the difference between the new perturbed co-ordinates and the unperturbed co-ordinates deduced from the elements (II). The new perturbations are for 1934 Dec. 11.11181 U. T.:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= + 0.048\ 392 \\ \eta &= - 0.013\ 344 \\ \zeta &= - 0.007\ 886 \end{aligned} \right\} 1950.0$$

From these values of the perturbations I have made a new revision, which gave the new set of elements:

Epoch and osculation 1929 Febr. 18.0 U. T.

$$\left. \begin{aligned} M &= 354^{\circ}.91062 \\ \omega &= 357.71203 \\ \Omega &= 126.32728 \\ i &= 3.72839 \\ e &= 0.3945470 \\ a &= 3.452821 \\ \mu &= 0.1536183 \end{aligned} \right\} 1950.0 \quad \text{(III)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= - 1.932\ 993 (\cos E - e) - 2.623\ 676 \sin E \\ y &= + 2.628\ 374 (\cos E - e) - 1.707\ 710 \sin E \\ z &= + 1.130\ 122 (\cos E - e) - 0.515\ 915 \sin E \end{aligned} \right\} 1950.0$$

Using these elements the computation of the perturbed equatorial co-ordinates for 1929—1936 has once more been repeated with the following result:

		Equinox 1950.0.					
U.T.		<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>	
1929	Jan.	19.0	- 0.378 371	+ 1.958 408	+ 0.782 290		
	—	29.0	0.509 628	1.915 578	0.773 035		
	Febr.	8.0	0.639 318	1.866 866	0.761 406		
	—	18.0	0.767 008	1.812 318	0.747 397		
	—	28.0	0.892 265	1.752 026	0.731 018		
	March	10.0	1.014 662	1.686 119	0.712 297		
	—	20.0	1.133 784	1.614 772	0.691 277		
	—	30.0	- 1.249 237	+ 1.538 199	+ 0.668 020		

		Equinox 1950.0.						
U. T.		x		y		z		
1929	April	9.0	-1.360	649	+1.456	650	+0.642	603
	—	19.0	1.467	681	1.370	412	0.615	117
	—	29.0	1.570	027	1.279	797	0.585	666
	May	9.0	1.667	420	1.185	143	0.554	367
	—	19.0	1.759	635	1.086	806	0.521	346
	—	29.0	1.846	486	0.985	155	0.486	734
	June	8.0	1.927	833	0.880	566	0.450	672
	—	18.0	2.003	576	0.773	414	0.413	298
	July	8.0	2.138	045	0.552	909	0.335	183
	—	28.0	2.249	848	0.326	511	0.253	502
	Aug.	17.0	2.339	435	+0.096	857	0.169	305
	Sept.	6.0	2.407	641	-0.133	713	+0.083	549
	—	26.0	2.455	572	0.363	186	-0.002	922
	Oct.	16.0	2.484	507	0.589	876	0.089	381
	Nov.	5.0	2.495	816	0.812	405	0.175	215
	—	25.0	2.490	894	1.029	674	0.259	919
	Dec.	15.0	2.471	118	1.240	824	0.343	081
1930	Jan.	4.0	2.437	815	1.445	201	0.424	372
	—	24.0	2.392	242	1.642	322	0.503	535
	Febr.	13.0	2.335	578	1.831	845	0.580	370
	March	5.0	2.268	914	2.013	541	0.654	726
	—	25.0	2.193	258	2.187	271	0.726	493
	April	14.0	2.109	533	2.352	969	0.795	594
	May	4.0	2.018	588	2.510	625	0.861	976
	—	24.0	1.921	193	2.660	274	0.925	609
	July	3.0	1.709	819	2.935	845	1.044	590
	Aug.	12.0	1.480	348	3.180	491	1.152	574
	Sept.	21.0	1.236	899	3.395	249	1.249	730
	Oct.	31.0	0.982	925	3.581	263	1.336	310
	Dec.	10.0	0.721	341	3.739	706	1.412	605
1931	Jan.	19.0	0.454	628	3.871	749	1.478	927
	Febr.	28.0	-0.184	917	3.978	497	1.535	594
	April	9.0	+0.085	945	4.061	037	1.582	918
	May	19.0	0.356	337	4.120	377	1.621	200
	June	28.0	+0.624	825	-4.157	467	-1.650	728

Equinox 1950.0.

	U. T.	x		y		z	
1931	Aug. 7.0	+ 0.890	120	- 4.173	199	- 1.671	779
	Sept. 16.0	1.151	053	4.168	410	1.684	609
	Oct. 26.0	1.406	549	4.143	884	1.689	464
	Dec. 5.0	1.655	608	4.100	356	1.686	573
1932	Jan. 14.0	1.897	286	4.038	522	1.676	153
	Febr. 23.0	2.130	682	3.959	037	1.658	408
	April 3.0	2.354	923	3.862	525	1.633	531
	May 13.0	2.569	154	3.749	584	1.601	706
	June 22.0	2.772	530	3.620	789	1.563	109
	Aug. 1.0	2.964	199	3.476	700	1.517	910
	Sept. 10.0	3.143	301	3.317	865	1.466	274
	Oct. 20.0	3.308	955	3.144	832	1.408	363
	Nov. 29.0	3.460	247	2.958	150	1.344	339
1933	Jan. 8.0	3.596	230	2.758	378	1.274	366
	Febr. 17.0	3.715	903	2.546	099	1.198	615
	March 29.0	3.818	210	2.321	925	1.117	264
	May 8.0	3.902	027	2.086	511	1.030	503
	June 17.0	3.966	147	1.840	572	0.938	543
	July 27.0	4.009	273	1.584	899	0.841	619
	Sept. 5.0	4.030	003	1.320	384	0.739	997
	Oct. 15.0	4.026	816	1.048	048	0.633	988
	Nov. 24.0	3.998	059	0.769	074	0.523	961
1934	Jan. 3.0	3.941	932	0.484	857	0.410	354
	Febr. 12.0	3.856	482	- 0.197	062	0.293	705
	March 24.0	3.739	590	+ 0.092	306	0.174	675
	May 3.0	3.588	981	0.380	796	- 0.054	087
	June 12.0	3.402	240	0.665	395	+ 0.067	024
	July 2.0	3.294	540	0.805	100	0.127	378
	— 22.0	3.176	867	0.942	363	0.187	345
	Aug. 11.0	3.048	912	1.076	570	0.246	703
	— 31.0	2.910	377	1.207	033	0.305	202
	Sept. 20.0	2.760	986	1.332	986	0.362	560
	Oct. 10.0	2.600	496	1.453	570	0.418	456
	— 30.0	2.428	707	1.567	827	0.472	530
	Nov. 19.0	+ 2.245	490	+ 1.674	692	+ 0.524	375

Equinox 1950.0.

U. T.		x		y		z	
1934	Dec.	9.0	+2.050 800	+1.772 983	+0.573 534		
	—	29.0	1.844 716	1.861 401	0.619 498		
1935	Jan.	18.0	1.627 468	1.938 529	0.661 703		
	Febr.	7.0	1.399 484	2.002 835	0.699 531		
	—	27.0	1.161 436	2.052 696	0.732 311		
	March	19.0	0.914 290	2.086 424	0.759 335		
	April	8.0	0.659 362	2.102 320	0.779 866		
	—	28.0	0.398 358	2.098 739	0.793 171		
	May	18.0	+0.133 406	2.074 185	0.798 548		
	June	7.0	—0.132 942	2.027 424	0.795 374		
	—	27.0	0.397 748	1.957 603	0.783 152		
	July	17.0	0.657 774	1.864 377	0.761 565		
	Aug.	6.0	0.909 609	1.748 001	0.730 520		
	—	26.0	1.149 862	1.609 389	0.690 182		
	Sept.	15.0	1.375 343	1.450 106	0.640 980		
	Oct.	5.0	1.583 262	1.272 298	0.583 589		
	—	25.0	1.771 378	1.078 558	0.518 892		
	Nov.	14.0	1.938 090	0.871 761	0.447 915		
	Dec.	4.0	2.082 459	0.654 885	0.371 764		
	—	24.0	2.204 172	0.430 856	0.291 556		
1936	Jan.	13.0	—2.303 859	+0.202 413	+0.208 371		

Comparison with the 4 normal places then gave the residuals:

U. T.		$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
Normal place	Nr. 1 1929 Febr.	1.0	—0 ^s .15 +0 ^{''} .2
—	— - 2 1929 March	31.0	+0.14 +0.1
—	— - 3 1934 Dec.	12.0	+0.02 +2.3
—	— - 4 1935 Febr.	7.0	—0.89 —5.5

The discrepancies between observation and computation are now so small that the orbit may be considered as fairly satisfactory. A revision based on the last computation of

perturbed co-ordinates should be postponed till the appearance of new observations.

From the co-ordinates and velocities for 1935 Oct. 5.0 I deduced the following osculating elements:

Epoch and osculation 1935 Oct. 5.0 U. T.

$$\begin{aligned}
 M &= 5^{\circ}74536 \\
 \omega &= 357.97151 \\
 \Omega &= 126.29158 \\
 i &= 3.72853 \\
 e &= 0.3938329 \\
 a &= 3.455860 \\
 \mu &= 0.1534157
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ e \\ a \\ \mu \end{aligned}} \right\} 1950.0 \quad \text{(III a)}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -1.945\ 836 (\cos E - e) - 2.619\ 892 \sin E \\
 y &= +2.623\ 348 (\cos E - e) - 1.719\ 222 \sin E \\
 z &= +1.129\ 044 (\cos E - e) - 0.520\ 587 \sin E
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ y \\ z \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

As it may be possible to observe the comet during the winter 1935—36 I have computed the following ephemeris from the elements (III a).

0^h U. T.

1935		α 1935.0	δ 1935.0	Δ	r
Oct.	25	11 ^h 6 ^m 49 ^s	+ 6°46'.1	2.714	2.138
—	29	14 33	6 3.0	2.687	2.144
Nov.	2	22 10	5 20.3	2.659	2.150
—	6	29 39	4 38.1	2.631	2.157
—	10	37 1	3 56.5	2.602	2.164
—	14	44 16	3 15.6	2.572	2.172
—	18	51 23	2 35.5	2.541	2.180
—	22	11 58 21	1 56.4	2.509	2.188
—	26	12 5 10	1 18.4	2.477	2.196
—	30	12 11 49	+ 0 41.6	2.444	2.205

0^h U. T.

1935		α 1935.0	δ 1935.0	Δ	r
Dec.	4	12 ^h 18 ^m 19 ^s	+ 0° 6'0	2.410	2.214
—	8	24 39	— 0 28.1	2.375	2.224
—	12	30 48	1 0.7	2.340	2.234
—	16	36 45	1 31.8	2.305	2.244
—	20	42 30	2 1.2	2.269	2.254
—	24	48 1	2 28.7	2.232	2.265
—	28	53 18	2 54.3	2.195	2.276
—	32	12 58 21	— 3 17.9	2.158	2.287

0^h U. T.

1936		α 1936.0	δ 1936.0	Δ	r
Jan.	1	12 ^h 58 ^m 24 ^s	— 3°18'2	2.158	2.287
—	5	13 3 11	3 39.8	2.120	2.298
—	9	7 40	3 59.1	2.083	2.310
—	13	11 52	4 16.2	2.045	2.322
—	17	15 44	4 30.9	2.008	2.334
—	21	19 16	4 43.2	1.971	2.346
—	25	22 27	4 53.0	1.934	2.359
—	29	25 15	5 0.2	1.898	2.371
Febr.	2	27 39	5 4.9	1.863	2.384
—	6	29 38	5 6.9	1.830	2.397
—	10	31 12	5 6.3	1.797	2.411
—	14	32 20	5 3.0	1.766	2.424
—	18	33 1	4 57.1	1.736	2.438
—	22	33 15	4 48.6	1.709	2.452
—	26	33 1	4 37.7	1.683	2.466
March	1	32 21	4 24.5	1.660	2.480
—	5	13 31 15	— 4 9.0	1.641	2.494

The small inclination of the orbit and the distance of the aphelion 4.81 made a former proximity to Jupiter probable. In fact such a proximity took place in the first part of 1926.

To find the elements before this I have computed the co-ordinates backwards till 1920. From 1929 to 1924 Jupiter and Saturn were taken into consideration in a 7-figure computation, from 1924 to 1920 only Jupiter was considered and a 6-figure computation was used. The resulting equatorial co-ordinates were as follows:

		Equinox 1950.0.					
U. T.		x		y		z	
1929	Jan.	9.0	— 0.245	974	+ 1.995	348	+ 0.789 193
1928	Dec.	30.0	— 0.112	853	2.026	431	0.793 779
	—	20.0	+ 0.020	594	2.051	722	0.796 096
	—	10.0	0.153	986	2.071	320	0.796 205
	Nov.	30.0	0.286	968	2.085	352	0.794 173
	—	20.0	0.419	207	2.093	966	0.790 078
	—	10.0	0.550	399	2.097	332	0.784 002
<hr/>							
	Oct.	21.0	0.808	557	2.089	076	0.766 266
	—	1.0	1.059	544	2.062	193	0.741 695
	Sept.	11.0	1.301	874	2.018	388	0.711 037
	Aug.	22.0	1.534	436	1.959	377	0.675 020
	—	2.0	1.756	437	1.886	832	0.634 340
	July	13.0	1.967	356	1.802	341	0.589 642
	June	23.0	2.166	890	1.707	383	0.541 520
	—	3.0	2.354	908	1.603	320	0.490 508
	May	14.0	2.531	414	1.491	391	0.437 091
	April	24.0	2.696	514	1.372	718	0.381 696
	—	4.0	2.850	391	1.248	308	0.324 707
	March	15.0	2.993	281	1.119	066	0.266 461
	Febr.	24.0	3.125	459	0.985	800	0.207 258
	—	4.0	3.247	225	0.849	234	0.147 362
	Jan.	15.0	3.358	894	0.710	012	0.087 008
1927	Dec.	26.0	3.460	791	0.568	712	+ 0.026 400
	—	6.0	3.553	241	0.425	849	— 0.034 276
	Nov.	16.0	3.636	570	0.281	885	0.094 860
	Oct.	27.0	3.711	097	+ 0.137	234	0.155 209
	—	7.0	+ 3.777	136	— 0.007	734	— 0.215 194

Equinox 1950.0.

U. T.		x		y		z	
1927	Sept.	17.0	+ 3.834 994	- 0.152 682	- 0.274 701		
	Aug.	28.0	3.884 966	0.297 311	0.333 629		
	—	8.0	3.927 341	0.441 348	0.391 887		
	July	19.0	3.962 396	0.584 546	0.449 394		
	June	29.0	3.990 401	0.726 680	0.506 076		
	—	9.0	4.011 615	0.867 547	0.561 866		
	May	20.0	4.026 290	1.006 962	0.616 706		
	April	30.0	4.034 668	1.144 752	0.670 540		
	—	10.0	4.036 986	1.280 763	0.723 319		
	March	21.0	4.033 473	1.414 852	0.774 999		
	—	1.0	4.024 353	1.546 885	0.825 538		
	Febr.	9.0	4.009 845	1.676 742	0.874 899		
	Jan.	20.0	3.990 164	1.804 308	0.923 048		
1926	Dec.	31.0	3.965 524	1.929 483	0.969 954		
	—	11.0	3.936 138	2.052 170	1.015 591		
	Nov.	21.0	3.902 221	2.172 283	1.059 933		
	—	1.0	3.863 992	2.289 745	1.102 963		
	Oct.	12.0	3.821 679	2.404 491	1.144 665		
	Sept.	22.0	3.775 517	2.516 467	1.185 032		
	—	2.0	3.725 760	2.625 634	1.224 067		
	Aug.	13.0	3.672 683	2.731 979	1.261 787		
	July	24.0	3.616 584	2.835 523	1.298 233		
	—	4.0	3.557 790	2.936 335	1.333 481		
	June	14.0	3.496 654	3.034 561	1.367 658		
	May	25.0	3.433 521	3.130 453	1.400 974		
	—	5.0	3.368 666	3.224 398	1.433 737		
	April	15.0	3.302 173	3.316 904	1.466 350		
	March	26.0	3.233 796	3.408 483	1.499 229		
	—	6.0	3.162 945	3.499 449	1.532 652		
	Febr.	14.0	3.088 901	3.589 738	1.566 614		
	Jan.	25.0	3.011 102	3.678 972	1.600 869		
	—	5.0	2.929 293	3.766 630	1.635 054		
1925	Dec.	16.0	2.843 474	3.852 210	1.668 808		
	Nov.	26.0	2.753 801	3.935 314	1.701 847		
	—	6.0	+ 2.660 495	- 4.015 635	- 1.733 945		

Equinox 1950.0.

U. T. (resp. G. M. T.)		x	y	z
1925	Oct.	17.0 + 2.563 797	- 4.092 950	- 1.764 944
	Sept.	27.0 2.463 944	4.167 095	1.794 725
	—	7.0 2.361 157	4.237 948	1.823 204
	Aug.	18.0 2.255 642	4.305 413	1.850 313
	July	29.0 2.147 592	4.369 419	1.876 007
	—	9.0 2.037 184	4.429 907	1.900 244
	June	19.0 1.924 583	4.486 828	1.922 997
	May	10.0 1.693 423	4.589 815	1.963 950
	March	31.0 1.455 270	4.678 125	1.998 718
	Febr.	19.0 1.211 194	4.751 553	2.027 193
	Jan.	10.0 0.962 186	4.809 941	2.049 293
1924	Nov.	30.5 0.709 202	4.853 159	2.064 958
	Oct.	21.5 0.453 158	4.881 090	2.074 138
	Sept.	11.5 + 0.194 951	4.893 642	2.076 794
	Aug.	2.5 - 0.064 537	4.890 738	2.072 895
	June	23.5 0.324 425	4.872 310	2.062 418
	May	14.5 0.583 839	4.838 312	2.045 350
	April	4.5 0.841 895	4.788 711	2.021 681
	Febr.	24.5 1.097 700	4.723 492	1.991 412
	Jan.	15.5 1.350 351	4.642 655	1.954 551
1923	Dec.	6.5 1.598 922	4.546 228	1.911 117
	Oct.	27.5 1.842 469	4.434 256	1.861 139
	Sept.	17.5 2.080 022	4.306 816	1.804 657
	Aug.	8.5 2.310 586	4.164 013	1.741 723
	June	29.5 2.533 131	4.005 993	1.672 410
	May	20.5 2.746 594	3.832 938	1.596 803
	April	10.5 2.949 880	3.645 084	1.515 015
	March	1.5 3.141 853	3.442 716	1.427 176
	Jan.	20.5 3.321 341	3.226 190	1.333 448
1922	Dec.	11.5 3.487 132	2.995 929	1.234 023
	Nov.	1.5 3.637 975	2.752 445	1.129 128
	Sept.	22.5 3.772 587	2.496 342	1.019 034
	Aug.	13.5 3.889 646	2.228 334	0.904 055
	July	4.5 - 3.987 810	- 1.949 257	- 0.784 560

		Equinox 1950.0.					
G. M. T.		x		y		z	
1922	May	25.5	-4.065	714	-1.660	081	-0.660 977
	April	15.5	4.121	987	1.361	927	0.533 793
	March	6.5	4.155	273	1.056	079	0.403 571
	Jan.	25.5	4.164	239	0.743	996	0.270 945
1921	Dec.	16.5	4.147	611	0.427	329	0.136 633
	Nov.	6.5	4.104	207	-0.107	925	-0.001 433
	Sept.	27.5	4.032	966	+0.212	161	+0.133 769
	Aug.	18.5	3.933	002	0.530	666	0.268 000
	July	9.5	3.803	644	0.845	121	0.400 201
	May	30.5	3.644	491	1.152	864	0.529 235
	April	20.5	3.455	468	1.451	060	0.653 897
	March	11.5	3.236	873	1.736	738	0.772 925
	Jan.	30.5	2.989	433	2.006	841	0.885 026
1920	Dec.	21.5	-2.714	342	+2.258	280	+0.988 902

The figure on page 19 illustrates the abnormally large perturbations in the orbit of the comet near the proximity to Jupiter in 1926. The orbit is shown projected on the ecliptic (the inclination is always very small).

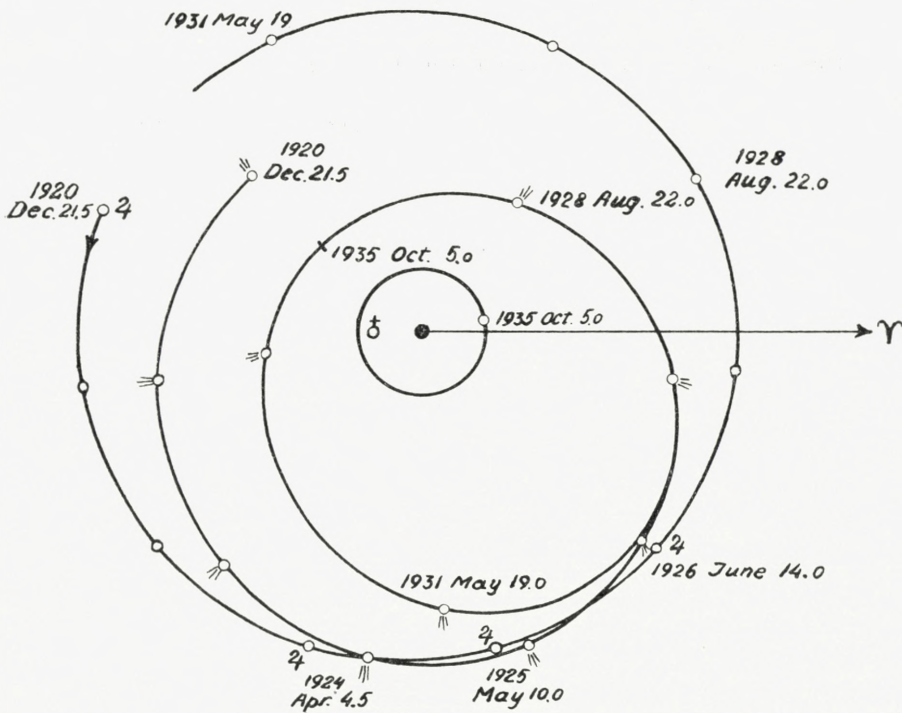
From the co-ordinates and velocities for 1921 March 11.5 I have deduced the following set of elements:

Epoch and osculation 1921 March 11.5 G. M. T.

$$\begin{aligned}
 M &= 32^{\circ}.384 \\
 \omega &= 335.462 \\
 \Omega &= 126.681 \\
 i &= 0.710 \\
 e &= 0.19707 \\
 a &= 4.4261 \\
 \mu &= 0.10585
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ e \\ a \\ \mu \end{aligned}} \right\} 1950.0 \quad \text{(III b)}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -0.93118 (\cos E - e) - 4.24194 \sin E \\
 y &= +3.97877 (\cos E - e) - 0.85674 \sin E \\
 z &= +1.70072 (\cos E - e) - 0.31824 \sin E
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ y \\ z \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

I have not been successful in establishing any identity between these elements and any other set of elements in the tables of comets and asteroids.



The following table shows the distance of the comet from Jupiter for a number of dates from 1921 to 1928:

U. T. (resp. G. M. T.)		Δ
1928	Nov. 10.0	3.508
1927	Oct. 7.0	1.188
1926	Sept. 2.0	0.357
1925	July 29.0	0.438
1924	June 23.5	0.895
1923	May 20.5	1.078
1922	April 15.5	1.141
1921	March 11.5	2.055

On 1926 March 26 the distance had a minimum value: 0.179.

I am indebted to the Carlsbergfond for a grant, which enabled me to carry out the present investigation.

University Observatory, Copenhagen 1935 Aug. 9.

HANS Q. RASMUSEN.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 17.

ENZYMIC HYDROLYSIS OF GLUCOSIDES
I. HYDROLYSIS OF METHYL- AND
ETHYL- β -D-GLUCOSIDES

BY

STIG VEIBEL AND FRANCISKA ERIKSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

In a previous paper (VEIBEL, 1934) one of the authors showed that both d- and l-hexanol-(2)- β -d-glucoside are hydrolyzed under the influence of emulsin, but that the reaction constants for the hydrolysis of the two glucosides are not identical, the ratio k_d/k_l being 3.44. At the same time it was shown that for d,l-3-methylpentanol-(1)- β -d-glucoside the ratio k_d/k_l was 1.07. As a cause for the difference between the reaction constants was suggested a difference in the affinity of emulsin to the different glucosides or to the different alcohols.

In the present paper we have examined this question more carefully, starting with glucosides containing aglycones as simple as possible, in order to get an opportunity of observing the influence of the structure of the aglycone on the hydrolysis-constant and the affinity-constant.

With a view to get as complete a knowledge as possible of the enzymic hydrolysis of glucosides we have determined the hydrolysis constants and the affinity constants at 30° and at 20°, thus making it possible to calculate the heat of activation for the hydrolysis of the glucoside and the heat of formation for the addition compound enzyme-substrate.

We have furthermore examined the influence of the products of hydrolysis, glucose and the alcohol in question, on the rate of hydrolysis. This we have done by determining

the velocity constants in experiments where the solution besides glucoside contained one or the other of the products of hydrolysis in various concentrations. If an inhibiting action exists, it is in this way possible to determine an affinity constant for the union of emulsin with the products of hydrolysis.

The investigation is therefore divided into two parts.

A. Determination of the velocity constant of hydrolysis and the affinity constant at 30° and at 20°.

The velocity constants are determined for 0.04 M glucoside solutions. In order to compare velocity constants determined in different experiments it is necessary to know the concentration of emulsin, e.g. expressed as g emulsin in 50 ml. reaction mixture, and the enzymic power of the emulsin preparation used, e.g. expressed as sal. f. (JOSEPHSON, 1925). Sal. f. is determined by the action of emulsin on a standard solution of salicin at 30° and p_H 4.4. The quotients $k/e \cdot (\text{sal. f.})$ are then directly comparable.

We have found for methyl-glucoside $k/e \cdot (\text{sal. f.})$ at 30° = $2.7 \cdot 10^{-2}$, at 20° = $1.3_5 \cdot 10^{-2}$. k_{30}/k_{20} is 2 and the heat of activation is 12200 cal. For ethyl glucoside the corresponding figures are $k_{30} = 5.3 \cdot 10^{-2}$, $k_{20} = 2.2 \cdot 10^{-2}$. $k_{30}/k_{20} = 2.4$ and heat of activation 15400 cal.

The affinity constant is for methyl glucoside 1.6. (JOSEPHSON (1925) found the value 1.4) and for ethyl glucoside 4.0. In both cases k_{M30}/k_{M20} is 1.

It will be seen that the temperature coefficient for the velocity constants differs for the two glucosides examined, whereas the affinity constant is independent of the temperature. This means that it is only reasonable to examine whether proportionality exists between the affinity constant and the

velocity constant, when a standard temperature is fixed in advance. If the two constants are proportional at one temperature, this will not be the case at all other temperatures, as the temperature coefficients are different. From the values found for methyl and ethyl glucoside at 30° and at 20° it may be calculated that at 0° the two velocity constants ought to be of the same value. A control experiment carried out at 3—4° has shown that at this temperature the velocity constants for the two glucosides are practically identical.

Accordingly, the possibility mentioned in the previous paper (VEIBEL, 1934) that the difference of velocity of hydrolysis is exclusively dependent on differences in affinity constants cannot be maintained.

B. The influence of the products of hydrolysis.

The velocity constants were determined at 30° for solutions 0.04 M as to glucoside and at the same time 0, 0.01, 0.02, 0.04, 0.08 or 0.12 M as to one or the other of the products of hydrolysis. It was found that an inhibiting action of the two alcohols cannot be established with certainty. At all events it is impossible to calculate an affinity constant for the addition compound of emulsin and alcohol. JOSEPHSON (1925) has examined the hydrolysis of methyl glucoside in 50% methyl alcohol and has found the affinity constant for the compound emulsin-methyl-alcohol = 0.32. As regards ethyl alcohol we have not been able to find any examination of it previous to ours.

The inhibiting action of glucose is vigorous enough to allow a calculation of the affinity constant for the compound emulsin-glucose. From the experiments with methyl glucoside we calculate for this constant the value 4.9, from

the experiments with ethyl glucoside the value 5.9. In experiments with different glucosides JOSEPHSON (1925) has found values differing from 5.1 to 6.2 for the affinity constant glucose-emulsin.

It is to be noticed that the glucose used in these experiments is equilibrium glucose. As the glucosides employed are β -glucosides, it is likely that the inhibition caused by the glucose set free during the hydrolysis is greater than the inhibition found here.

Experimental.

In order to compare constants found for different glucosides it is necessary to fix standard conditions for the concentration of glucoside, for the p_H of the solution and, to a certain extent, for the emulsin concentration. As standard substrate concentration we have chosen 0.04 M and as standard p_H 4.4 (acetate buffer), the optimal p_H for emulsin when the aglycone is neutral. The emulsin concentration used by us was 0.20—0.25 g of an emulsin preparation of sal. f. = 0.040—0.045 in 50 ml. of the solution. Under these standard conditions the hydrolysis of the glucosides proceeds at a rate that may be conveniently followed.

In another place (VEIBEL and ERIKSEN (1936, 2)) we have called attention to some sources of error which are to be taken into account in the polarimetric examination of the hydrolysis of glucosides, namely that (a) the specific rotation of glucosides and of glucose is dependent on the p_H of the examined solution. In hydrolysis experiments the rotation is determined in solutions of p_H 10—11, and the difference in rotation at this p_H and at p_H 4—7, at which p_H the specific rotation is generally determined, is some 3—4 %. (b) Solutions of glucose, which are kept at

p_H 10—11, are not quite stable. The rotation of such solutions decreases with time, for 0.1 M solutions the decrease is 0.0033° per hour. (c) The reaction constants determined in experiments where toluene has been added are not directly comparable with reaction constants determined in experiments without the addition of toluene, this addition causing an increase in reaction constants of some 25—33 %.

1. Methyl- β -d-glucoside.

The enzymic hydrolysis of this glucoside has been examined previously, most carefully by JOSEPHSON (1925). It is possible, however, that his results may not be quite correct, as he seems to consider the methyl glucoside anhydrous. We have found that it contains $\frac{1}{2}$ Mol of water as reported e. g. in BEILSTEIN. Neither Josephson nor other investigators seem to have taken any notice of the sources of error mentioned above.

The preparation of methyl glucoside used in the experiments described here showed M. P. $108-10^\circ$ (corr.) and $[\alpha]_D^{20} = -32^\circ.5$ (water, $c = 2.835$). The experimental method employed by us has previously been described (VEIBEL, 1934).

a. Determination of the velocity constant and its temperature coefficient. Tables I and II give the results of hydrolysis experiments at 30° and at 20° . All reaction constants are calculated with logarithms to base 10 and the minute as unit of time.

Table I.
Hydrolysis. 30°.

c_{emulsin} 0.2233 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.380^\circ$. Sal. f. = 0.043.
 $c_{\text{glucoside}} = 0.0400$ M. $\alpha_{\text{beg.}} = -0.455^\circ$, $\alpha_{\text{end}} = +0.620^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.835	—	-0.835	—	1.075	—
120	4.0	-0.745	—	-0.745	0.090	0.985	(3.16)
240	4.0	-0.680	—	-0.680	0.155	0.920	2.82
360	18.0	-0.635	0.005	-0.630	0.205	0.870	2.55
540	16.0	-0.555	0.005	-0.550	0.285	0.790	2.48
780	13.0	-0.450	0.005	-0.445	0.390	0.685	2.51
1440	4.0	-0.250	0.005	-0.245	0.590	0.485	2.40
1980	17.0	-0.145	0.015	-0.130	0.705	0.370	(2.34)
2880	4.0	-0.010	0.005	-0.005	0.830	0.245	(2.23)
mean value...							2.6

$$k/e \cdot (\text{sal. f.}) = 2.7 \cdot 10^{-2}$$

Table II.
Hydrolysis. 20°.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table I.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.835	—	-0.835	—	1.075	—
120	4.0	-0.770	—	-0.770	0.065	1.010	(2.26)
240	4.0	-0.750	—	-0.750	0.085	0.990	1.49
360	18.0	-0.720	0.005	-0.715	0.120	0.955	1.43
540	16.0	-0.670	0.005	-0.665	0.170	0.905	1.38
780	13.0	-0.630	0.005	-0.625	0.210	0.865	1.21
1440	4.0	-0.500	—	-0.500	0.335	0.740	1.13
1980	17.0	-0.420	0.010	-0.410	0.425	0.650	(1.10)
2880	4.0	-0.290	0.005	-0.285	0.550	0.525	(1.08)
mean value...							1.3

$$k/e \cdot (\text{sal. f.}) = 1.35 \cdot 10^{-2}$$

From the values of $k/e \cdot (\text{sal. f.})$ at 30° and at 20° k_{30}/k_{20} is seen to be 2.0. The heat of activation is calculated to be 12200 cal. per Mol from the expression

$$E = \frac{R \cdot T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \cdot \ln \frac{k_2}{k_1}$$

b. The affinity constant and its temperature coefficient. The affinity constant has been introduced by MICHAELIS and MENTEN (1913). We do not wish to discuss here whether this constant is a true thermodynamic constant or not, this question having been thoroughly discussed in a paper by BRIGGS (1931).

For the determination of the affinity constant K_M we have used the graphical method recommended in the book of HALDANE and STERN (1932, p. 119), which is discussed in a paper by LINEWEAVER and BURK (1934). For 6 different glucoside concentrations we have determined the initial rate of hydrolysis, the enzyme concentration being the same in all cases. For each glucoside concentration we have taken 4 readings at different times. From the ex-

pression $v = \frac{V \cdot c}{K_m + c}$, which may be written as $V/v = 1 + K_m/c$, (V the velocity when the enzyme is completely bound to the substrate) it may be seen that on plotting the values of $1/v$ against the values of $1/c$ a straight line is determined, and that the intercepts made on the axes by this line have the values $1/V$ and $-1/K_m = -K_M$.

We have determined the affinity constant at 30° and at 20° . Tables III and IV and fig. 1 give the results, which are that both at 30° and at 20° the affinity constant is 1.6. JOSEPHSON (1925) has found the value 1.4 at 30° ; this is, within the limits of the experiment, the same value as ours.

When the affinity constant has, within the limits of the experiment, the same value at 30° as at 20° , the heat of formation for the enzyme-substrate-compound must be zero or very small. The value of the heat of formation for com-

Table III.

Affinity constant. 30°.

c_{emulsin} 0.1976 g in 50 ml., α_{emulsin} -0.340° in all experiments.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	1/v
I. 0.0204 M glucoside. $1/c = 49.0$.						
0	4.0	-0.570	—	-0.570	—	—
120	—	—	—	—	—	—
240	5.0	-0.510	—	-0.510	0.060	16.67
360	20.0	-0.465	—	-0.465	0.105	9.52
480	20.0	-0.440	—	-0.440	0.130	7.69
II. 0.409 M glucoside. $1/c = 24.5$.						
0	4.0	-0.805	—	-0.805	—	—
120	4.0	-0.730	—	-0.730	0.075	13.33
240	5.0	-0.665	—	-0.665	0.140	7.14
360	20.0	-0.620	0.005	-0.615	0.190	5.26
480	20.0	-0.565	0.005	-0.560	0.245	4.08
III. 0.0826 M glucoside. $1/c = 12.1$.						
0	4.0	-1.280	—	-1.280	—	—
120	4.0	-1.145	—	-1.145	0.135	7.41
240	5.0	-1.030	—	-1.030	0.250	4.00
360	20.0	-0.915	0.010	-0.905	0.375	2.67
480	20.0	-0.820	0.010	-0.810	0.470	2.13
IV. 0.1672 M glucoside. $1/c = 6.0$.						
0	4.0	-2.240	—	-2.240	—	—
120	4.0	-2.000	—	-2.000	0.240	4.17
240	5.0	-1.780	0.005	-1.775	0.465	2.15
360	20.0	-1.575	0.015	-1.560	0.680	1.47
480	20.0	-1.400	0.020	-1.380	0.860	1.16
V. 0.3334 M glucoside. $1/c = 3.0$.						
0	4.0	-4.135	—	-4.135	—	—
120	4.0	-3.710	—	-3.710	0.425	2.35
240	5.0	-3.365	0.005	-3.360	0.775	1.29
360	20.0	-3.040	0.025	-3.015	1.120	0.89
480	20.0	-2.730	0.035	-2.695	1.440	0.69
VI. 0.6689 M glucoside. $1/c = 1.5$.						
0	4.0	-7.950	—	-7.950	—	—
120	4.0	-7.380	0.005	-7.375	0.575	1.74
240	5.0	-6.840	0.005	-6.835	1.115	0.90
360	20.0	-6.360	0.040	-6.320	1.630	0.61
480	20.0	-5.850	0.050	-5.800	2.150	0.47

Table IV.

Affinity constant, 20°.

$c_{\text{emulsin}} 0.2082 \text{ g in } 50 \text{ ml.}, \alpha_{\text{emulsin}} -0.355^\circ \text{ in all experiments.}$

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	1/v
I. 0.0200 M glucoside. $1/c = 50.0$.						
0	4.0	-0.585	—	-0.585	—	—
120	4.0	-0.555	—	-0.555	0.030	33.33
240	5.0	-0.535	—	-0.535	0.050	20.00
360	20.0	-0.515	—	-0.515	0.070	14.29
480	20.0	-0.500	—	-0.500	0.085	11.76
II. 0.0400 M glucoside. $1/c = 25.0$.						
0	4.0	-0.810	—	-0.810	—	—
120	4.0	-0.765	—	-0.765	0.045	22.22
240	5.0	-0.730	—	-0.730	0.080	12.50
360	20.0	-0.690	0.005	-0.685	0.125	8.00
480	20.0	-0.660	0.005	-0.655	0.155	6.45
III. 0.0800 M glucoside. $1/c = 12.5$.						
0	4.0	-1.265	—	-1.265	—	—
120	4.0	-1.180	—	-1.180	0.085	11.76
240	5.0	-1.115	—	-1.115	0.150	6.67
360	20.0	-1.055	0.005	-1.050	0.215	4.65
480	20.0	-1.005	0.005	-1.000	0.265	3.77
IV. 0.1600 M glucoside. $1/c = 6.25$.						
0	4.0	-2.175	—	-2.175	—	—
120	5.0	-2.015	—	-2.015	0.160	6.25
240	5.0	-1.910	—	-1.910	0.265	3.77
360	20.0	-1.800	0.010	-1.790	0.385	2.60
480	20.0	-1.690	0.010	-1.680	0.495	2.02
V. 0.3142 M glucoside. $1/c = 3.18$.						
0	4.0	-3.930	—	-3.930	—	—
120	4.0	-3.630	—	-3.630	0.300	3.33
240	5.0	-3.455	0.005	-3.450	0.480	2.08
360	20.0	-3.290	0.020	-3.270	0.660	1.52
480	20.0	-3.135	0.020	-3.115	0.815	1.23
VI. 0.6160 M glucoside. $1/c = 1.62$.						
0	4.0	-7.360	—	-7.360	—	—
120	5.0	-6.820	0.005	-6.815	0.545	1.83
240	5.0	-6.530	0.005	-6.525	0.835	1.20
360	20.0	-6.265	0.030	-6.235	1.125	0.89
480	20.0	-6.020	0.030	-5.990	1.370	0.73

pounds of hydrolysing ferments with their substrates has been discussed, EULER and LAURIN (1920) having found for the formation of a saccharase-saccharose-compound the

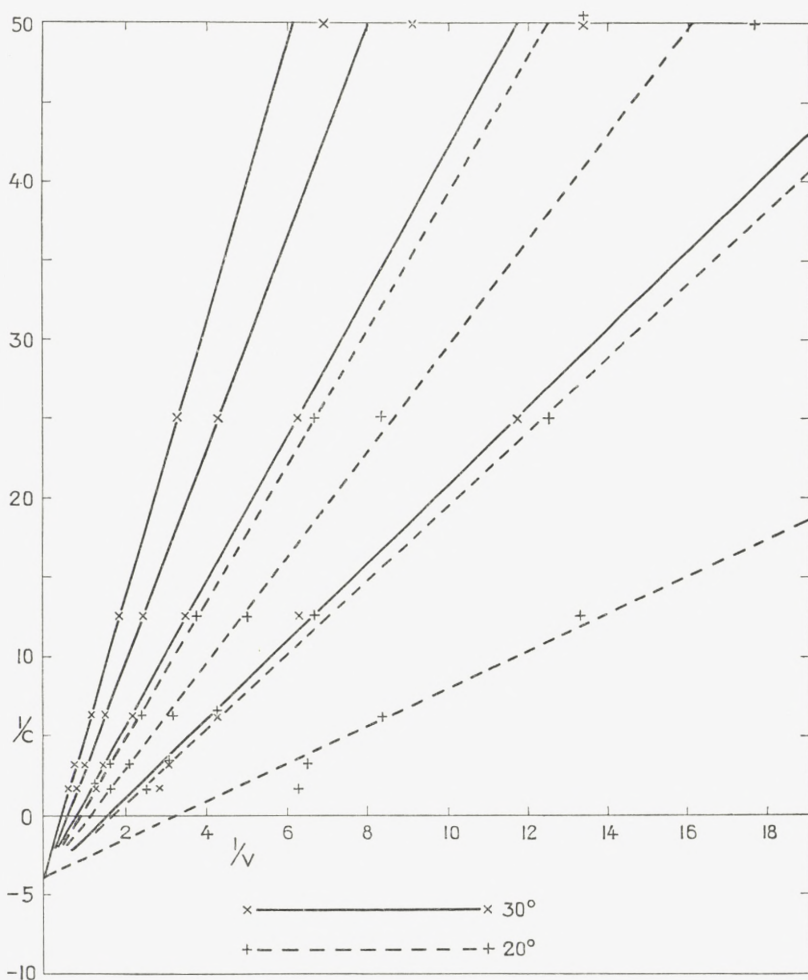


Fig. 1.

heat of formation to be 2000 cal., whereas NELSON and BLOOMFIELD (1924) for the same compound found the value zero. Our results coincide with the results of Nelson and Bloomfield, both for methyl glucoside and for ethyl glucoside (see below).

c. The influence of the products of hydrolysis. The glucoside and the emulsin concentrations had the usual standard values, but so much glucose or methyl-alcohol was added that the concentration of the one or the other of these substances was 0.01, 0.02, 0.04, 0.08 or 0.12 M. The glucose was taken from a stock solution old enough to ensure that it contained equilibrium glucose.

In order to prevent the growth of microorganisms in the solutions containing glucose, 1 ml. of toluene was added to each measuring flask of 50 ml. As mentioned above, velocity constants found in experiments where toluene has been added are not to be compared with constants found in experiments without the addition of toluene.

In the experiments with addition of methyl alcohol no toluene was added.

Tables V—X give the results. The two first tables show the influence of glucose and methyl alcohol respectively. Tables VII—X give data from single experiments to show the accuracy which is to be expected in the determination of the reaction constants.

Table V. Influence of glucose.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table VII. 1 ml. toluene added.

c_{glucose}	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.12 M
$k \cdot 10^4$	3.5	3.2	3.0	2.6	2.4	2.2

Table VI. Influence of methyl alcohol.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table IX. No toluene added.

$c_{\text{CH}_3\text{OH}}$	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.12 M
$k \cdot 10^4$	2.7	2.7	2.6	2.7	2.6	2.6

Table VII.

Influence of glucose.

c_{emulsin} 0.1943 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.330^\circ$. 1 ml. Toluene added. $c_{\text{glucoside}}$ 0.0400 M. c_{glucose} 0.0200 M. $\alpha_{\text{beg.}} = -0.475^\circ$,
 $\alpha_{\text{end}} = +0.600^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	5.0	-0.480	0.005	-0.475	—	1.075	—
120	5.0	-0.385	0.005	-0.380	0.095	0.980	3.35
240	4.0	-0.305	0.005	-0.300	0.175	0.900	3.22
360	19.5	-0.255	0.015	-0.240	0.235	0.840	2.98
540	18.5	-0.175	0.015	-0.160	0.315	0.760	2.79
720	17.0	-0.095	0.015	-0.080	0.395	0.680	2.76
1440	7.0	+0.165	0.010	+0.175	0.650	0.425	2.80
mean value...							3.0

Table VIII.

Influence of glucose.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table VII. c_{glucose} 0.1200 M.
 $\alpha_{\text{beg.}} = +1.030^\circ$, $\alpha_{\text{end}} = +2.105^\circ$. 1 ml. toluene added.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	5.5	+1.010	0.020	+1.030	—	1.075	—
120	5.0	+1.075	0.020	+1.095	0.065	1.010	2.26
240	4.5	+1.145	0.015	+1.160	0.130	0.945	2.33
360	20.0	+1.135	0.075	+1.210	0.180	0.895	2.21
540	19.5	+1.225	0.075	+1.300	0.270	0.805	2.33
720	17.5	+1.290	0.070	+1.360	0.330	0.745	2.21
1440	7.5	+1.545	0.030	+1.575	0.545	0.530	2.13
mean value...							2.2

Table IX.

Influence of methyl alcohol.

c_{emulsin} 0.2239 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.380^\circ$.
 $c_{\text{glucoside}}$ 0.0400 M. $c_{\text{methyl alcohol}}$ 0.02 M. $\alpha_{\text{beg.}} = -0.835^\circ$,
 $\alpha_{\text{end}} = +0.240^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.835	—	-0.835	—	1.075	—
120	4.0	-0.755	—	-0.755	0.080	0.995	2.80
240	4.0	-0.685	—	-0.685	0.150	0.925	2.72
360	18.0	-0.625	0.005	-0.620	0.215	0.860	2.69
480	20.0	-0.575	0.005	-0.570	0.265	0.810	2.56
780	17.0	-0.460	0.010	-0.450	0.385	0.690	2.47
1440	5.0	-0.265	0.005	-0.260	0.575	0.500	(2.31)
mean value...							2.6

Table X.
Influence of methyl alcohol.

c _{emulsin} and c _{glucoside} as in table IX.		c _{methyl alcohol} 0.12 M.					
Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	k · 10 ⁴
0	4.0	-0.835	—	-0.835	—	1.075	—
120	4.0	-0.755	—	-0.755	0.080	0.995	2.80
240	4.0	-0.690	—	-0.690	0.145	0.930	2.62
360	18.0	-0.630	0.005	-0.625	0.210	0.865	2.62
480	20.0	-0.580	0.005	-0.575	0.260	0.815	2.51
780	17.0	-0.465	0.010	-0.455	0.380	0.695	2.43
1440	5.0	-0.270	0.005	-0.265	0.570	0.505	(2.28)
mean value...							2.6

These experiments show that methyl alcohol in the concentration used here has no retarding influence on the hydrolysis. JOSEPHSON (1925, p. 113) has found that methyl alcohol in the concentration 1.2—2.5 M acts as an inhibitor. We have restricted the examination to concentrations of methyl alcohol of the same order of magnitude as the glucoside concentration used in hydrolysis experiments, and for these concentrations the inhibiting influence is negligible.

Glucose, on the other hand, retards the hydrolysis considerably. Already at 0.02 M glucose the value of the reaction constant has diminished some 15%. That means that the glucose set free during the hydrolysis will retard the reaction considerably. This may suffice to explain the steady fall in the reaction constant often observed in hydrolysis experiments.

JOSEPHSON (1925) has also examined the influence of an addition of glucose. He calculates the affinity constant for the addition compound of glucose and emulsin, making use of an equation given by MICHAELIS and MENTEN (1913)

$$K_{m1} = \frac{G \cdot K_m}{(S + K_m) (v_0/v - 1)}$$

where K_{m_1} is the dissociation constant for the glucose-emulsin compound, K_m the dissociation constant for the glucoside-emulsin compound, S the concentration of glucoside, G of glucose, v_0 the velocity in the first stage of the reaction when glucose has not been added, v the corresponding velocity when glucose has been added. Velocity means here change in rotation in t minutes.

It has been shown above that K_m for methyl glucoside has the value 0.62. Table XI shows that K_{m_1} has the value 0.20₅, i. e. that the affinity constant $K_{M_1} = 1/K_{m_1}$ is 4.9. JOSEPHSON (l. c.) has found the value 5.2, which within the limits of the experiment is the same as ours.

Table XI.

Affinity constant for the compound emulsin-glucose.

$K_m = 0.62$, $S = 0.04$, $G = 0.01-0.12$.

G. . . t	0.00		0.01		0.02		0.04		0.08		0.12	
	v_0	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v	
120	0.100	0.095	1.05	0.095	1.05	0.090	1.11	0.075	1.33	0.065	1.54	
240	0.185	0.175	1.06	0.175	1.06	0.160	1.16	0.125	1.48	0.130	1.42	
360	0.265	0.260	1.02	0.235	1.13	0.215	1.23	0.185	1.43	0.180	1.47	
540	0.365	0.350	1.04	0.315	1.16	0.305	1.20	0.270	1.36	0.270	1.36	
mean values . . .			1.04		1.10		1.18		1.40		1.45	
K_{m_1}			0.235		0.189		0.209		0.189		(0.252)	
mean value . . .							0.20 ₅					

From the values of the term v_0/v for the different glucose concentrations it may be seen that up to a glucose concentration 0.08 M the retarding influence is proportional to the glucose concentration. At 0.12 M glucose this does not hold good, may be because the emulsin has been saturated with glucose. From a comparison of tables VII and VIII the same fact may be deduced, namely that the fall in the reaction constant during the experiment is not as great at the glucose concentration 0.12 M as at the glucose

concentration 0.02 M, which means that the glucose set free during the hydrolysis has not so great an influence in the former case as in the latter.

2. Ethyl- β -d-glucoside.

In the experiments described below a preparation with M. P. 81—83° and $[\alpha]_D^{20} = -38.6^\circ$ (water, $c = 3.533$) was used. These values differ rather much from those given by COIRRE (1913, 1, 2) and by BOURQUELOT and BRIDEL (1913), namely M. P. 73° and $[\alpha]_D = -36.5^\circ$. In another place a more careful description of the preparation and the properties of ethyl- β -d-glucoside will be given. (VEIBEL and ERIKSEN, (1936 1)).

a. Determination of the velocity constant at 30° and its temperature coefficient.

Tables XII and XIII give the results of hydrolysis experiments at 30° and at 20°.

Table XII.
Hydrolysis. 30°.

$c_{\text{emulsin}} = 0.2818$ g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.535^\circ$. Sal. f. = 0.044.

$c_{\text{glucoside}} = 0.0400$ M. $\alpha_{\text{beg.}} = -0.555^\circ$, $\alpha_{\text{end}} = +0.620^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	6.5	-1.090	—	-1.090	—	1.175	—
60	6.5	-0.980	—	-0.980	0.110	1.065	7.12
120	6.0	-0.890	—	-0.890	0.200	0.975	6.75
240	4.5	-0.750	—	-0.750	0.340	0.835	6.18
360	18.0	-0.615	0.010	-0.605	0.485	0.690	6.42
510	16.5	-0.520	0.010	-0.510	0.580	0.595	5.80
840	12.0	-0.320	0.010	-0.310	0.780	0.395	(5.64)
1440	4.5	-0.120	0.005	-0.115	0.975	0.200	(5.34)
1740	3.5	-0.080	0.005	-0.075	1.015	0.160	(4.98)

mean value ... 6.5

$$k/e \cdot (\text{sal. f.}) = 5.3 \cdot 10^{-2}.$$

Table XIII.
Hydrolysis. 20°.

		c _{emulsin} and c _{glucoside} as in table XII.					
Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	k · 10 ⁴
0	7.0	-1.090	—	-1.090	—	1.175	—
60	6.5	-1.045	—	-1.045	0.045	1.130	2.83
120	6.0	-1.005	—	-1.005	0.085	1.090	2.72
240	4.5	-0.925	—	-0.925	0.165	1.010	2.74
360	18.5	-0.845	0.005	-0.840	0.250	0.925	2.89
510	17.0	-0.775	0.005	-0.770	0.320	0.855	2.71
840	12.0	-0.665	0.005	-0.660	0.430	0.745	2.36
1440	4.0	-0.490	0.005	-0.485	0.605	0.570	(2.18)
1740	3.5	-0.430	0.005	-0.425	0.665	0.510	(2.08)
mean value...							2.7

$$k/e \cdot (\text{sal. f.}) = 2.2 \cdot 10^{-2}.$$

In this case k_{30}/k_{20} is 2.4 and the heat of activation 15400 cal.

As the enzymic hydrolysis of ethyl glucoside has not been much investigated, we have examined if the rate of hydrolysis is proportional to the concentration of emulsin. Table XIV shows that this is the case.

Table XIV.
Proportionality between rate of hydrolysis and enzyme concentration.

c _{emulsin}	c _{glucoside}	k · 10 ⁴	k/e · (sal. f.)
0.0919 g	0.0400 M	2.1	5.3 · 10 ⁻²
0.1838 g	0.0400 M	4.3	5.4 · 10 ⁻²
0.2757 g	0.0400 M	6.5	5.5 · 10 ⁻²

b. The affinity constant and its temperature coefficient. As for methyl glucoside the affinity constant has been determined at 30° and at 20°. Tables XV and XVI and fig. 2 give the results, which are that at 30° as at 20° the affinity constant is 4.0. K_{M30}/K_{M20} is 1 and the

Table XV.

Affinity constant. 30°.

 c_{emulsin} 0.2304 g in 50 ml., $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.390^\circ$ in all experiments.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	1/v
I. 0.0200 M glucoside. $1/c = 50.00$.						
0	4.0	-0.670	—	-0.670	—	—
60	4.0	-0.630	—	-0.630	0.040	25.00
120	4.0	-0.595	—	-0.595	0.075	13.33
180	4.0	-0.560	—	-0.560	0.110	9.09
240	4.0	-0.525	—	-0.525	0.145	6.90
II. 0.0400 M glucoside. $1/c = 25.00$.						
0	4.0	-0.945	—	-0.945	—	—
60	4.0	-0.860	—	-0.860	0.085	11.76
120	4.5	-0.785	—	-0.785	0.160	6.25
180	4.5	-0.710	—	-0.710	0.235	4.25
240	4.5	-0.635	—	-0.635	0.310	3.23
III. 0.0800 M glucoside. $1/c = 12.50$.						
0	4.0	-1.500	—	-1.500	—	—
60	4.0	-1.340	—	-1.340	0.160	6.25
120	4.5	-1.210	—	-1.210	0.290	3.45
180	4.5	-1.085	—	-1.085	0.415	2.41
240	4.5	-0.965	0.005	-0.960	0.540	1.85
IV. 0.1600 M glucoside. $1/c = 6.25$.						
0	4.5	-2.610	—	-2.610	—	—
60	4.5	-2.375	—	-2.375	0.235	4.25
120	4.5	-2.145	—	-2.145	0.465	2.15
180	4.5	-1.930	0.005	-1.925	0.685	1.46
240	4.5	-1.725	0.005	-1.720	0.890	1.12
V. 0.3200 M glucoside. $1/c = 3.13$.						
0	4.5	-4.830	—	-4.830	—	—
60	4.5	-4.500	—	-4.500	0.330	3.03
120	4.5	-4.150	0.005	-4.145	0.680	1.46
180	4.5	-3.825	0.005	-3.820	1.010	0.99
240	4.5	-3.545	0.005	-3.540	1.290	0.78
VI. 0.6400 M glucoside. $1/c = 1.56$.						
0	5.0	-9.270	—	-9.270	—	—
60	5.0	-8.915	—	-8.915	0.355	2.82
120	5.0	-8.450	0.005	-8.445	0.825	1.21
180	5.0	-7.995	0.005	-7.990	1.280	0.78
240	5.0	-7.620	0.010	-7.610	1.660	0.60

Table XVI.

Affinity constant. 20°.

c_{emulsin} 0.2096 g in 50 ml., $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.355^\circ$ in all experiments.

Time min.	Samples kept h	α	corr.	α corr.	x	1/v
I. 0.0200 M glucoside. $1/c = 50.00$.						
0	3.5	-0.635	—	-0.635	—	—
60	3.5	-0.615	—	-0.615	0.020	50.00
120	4.0	-0.595	—	-0.595	0.040	25.00
180	4.0	-0.575	—	-0.575	0.060	16.67
240	21.0	-0.560	—	-0.560	0.075	13.33
II. 0.0400 M glucoside. $1/c = 25.00$.						
0	4.0	-0.910	—	-0.910	—	—
60	4.0	-0.860	—	-0.860	0.050	20.00
120	4.5	-0.830	—	-0.830	0.080	12.50
180	4.5	-0.790	—	-0.790	0.120	8.33
240	21.0	-0.765	0.005	-0.760	0.150	6.67
III. 0.0800 M glucoside. $1/c = 12.50$.						
0	4.0	-1.465	—	-1.465	—	—
60	4.0	-1.390	—	-1.390	0.075	13.33
120	4.5	-1.315	—	-1.315	0.150	6.67
180	4.5	-1.265	—	-1.265	0.200	5.00
240	21.5	-1.205	0.005	-1.200	0.265	3.77
IV. 0.1600 M glucoside. $1/c = 6.25$.						
0	4.0	-2.570	—	-2.570	—	—
60	4.0	-2.450	—	-2.450	0.120	8.33
120	5.0	-2.335	—	-2.335	0.235	4.26
180	5.0	-2.250	—	-2.250	0.320	3.13
240	22.0	-2.155	0.010	-2.145	0.425	2.35
V. 0.3200 M glucoside. $1/c = 3.13$.						
0	4.0	-4.790	—	-4.790	—	—
60	4.0	-4.635	—	-4.635	0.155	6.45
120	5.0	-4.460	—	-4.460	0.330	3.03
180	5.0	-4.305	—	-4.305	0.485	2.06
240	22.0	-4.180	0.015	-4.165	0.625	1.60
VI. 0.6400 M glucoside. $1/c = 1.56$.						
0	4.0	-9.220	—	-9.220	—	—
60	4.5	-9.060	—	-9.060	0.160	6.25
120	5.0	-8.815	—	-8.815	0.405	2.47
180	5.0	-8.600	—	-8.600	0.620	1.61
240	22.0	-8.420	0.020	-8.400	0.820	1.22

heat of formation of the glucoside-emulsin compound is zero.

c. The influence of the products of hydrolysis. The influence of glucose and of ethyl alcohol on the hydro-

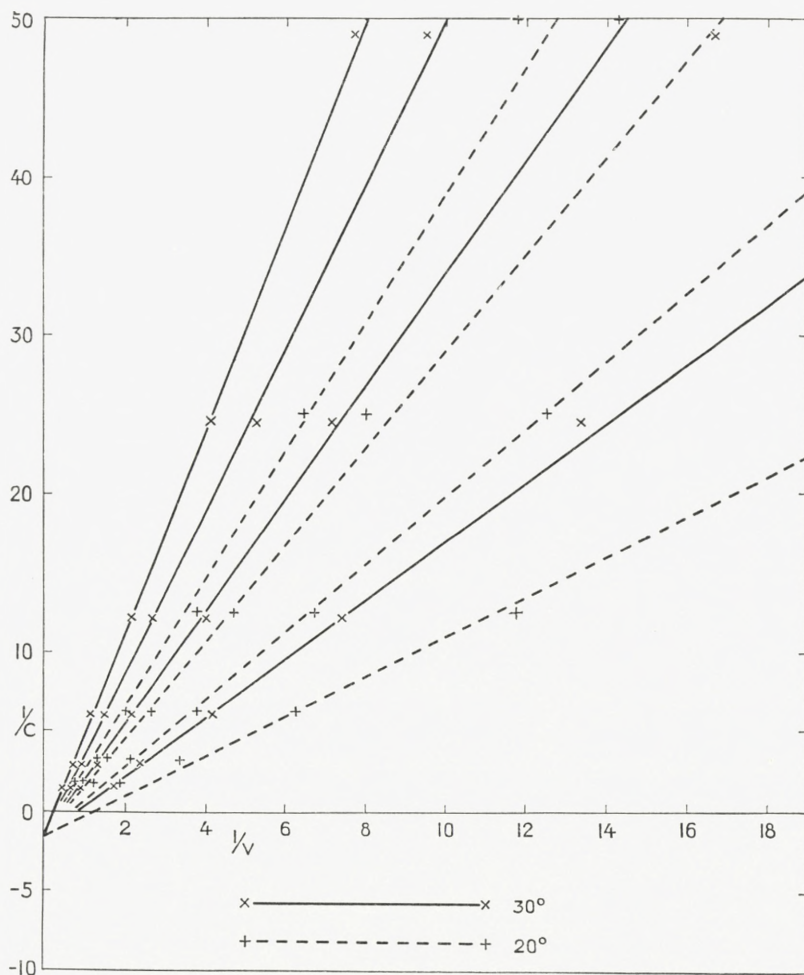


Fig. 2.

lysis was examined in the way described for methyl glucoside. Tables XVII and XVIII show the influence of glucose and ethyl alcohol respectively. Tables XIX—XXII are examples showing the variations within single experiments.

Table XVII.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table XIX 1 ml. toluene added.

c_{glucose} ······	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.12 M
$k \cdot 10^4$ ······	8.5	8.0	7.7	7.0	5.9	5.7

Table XVIII.

Influence of ethyl alcohol.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table XXI. No toluene added.

C_2H_5OH ······	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.12 M
$k \cdot 10^4$ ······	4.6	4.7	4.7	4.8	4.6	4.6

Table XIX.

Influence of glucose. Toluene added.

c_{emulsin} 0.2540 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.480^\circ$. sal. f. = 0.044.
 $c_{\text{glucoside}}$ 0.0400 M. c_{glucose} 0.0200 M. $\alpha_{\text{beg.}} -0.720^\circ$,
 $\alpha_{\text{end}} +0.455^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	6.0	-0.725	0.005	-0.720	—	1.175	—
60	6.5	-0.590	0.005	-0.585	0.135	1.040	8.84
120	6.5	-0.480	0.005	-0.475	0.245	0.930	8.46
240	21.0	-0.360	0.025	-0.335	0.385	0.790	7.18
360	21.0	-0.190	0.025	-0.165	0.555	0.620	7.71
510	20.0	-0.095	0.030	-0.065	0.655	0.520	6.94
720	18.0	+0.075	0.030	+0.105	0.825	0.350	7.31
1440	7.5	+0.270	0.015	+0.285	1.005	0.170	(5.83)
mean value...							7.7

Table XX.

Influence of glucose. Toluene added.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table XIX. c_{glucose} 0.1200 M.
 $\alpha_{\text{beg.}} +0.795^\circ$, $\alpha_{\text{end}} +1.970^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	7.0	+0.765	0.030	+0.795	—	1.175	—
60	7.0	+0.875	0.030	+0.905	0.110	1.065	(7.12)
120	7.0	+0.940	0.030	+0.970	0.175	1.000	5.84
240	21.5	+1.070	0.095	+1.165	0.370	0.805	6.84
360	21.5	+1.130	0.095	+1.225	0.430	0.745	5.50
510	20.0	+1.270	0.090	+1.360	0.565	0.610	5.58
720	19.0	+1.365	0.090	+1.455	0.660	0.515	4.98
1440	8.0	+1.695	0.040	+1.735	0.940	0.235	(4.85)
mean value...							5.7

Table XXI.

Influence of ethyl alcohol.

c_{emulsin} 0.2008 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.345^\circ$, sal. f. 0.043.
 $c_{\text{glucoside}}$ 0.0400 M. $c_{\text{ethyl alcohol}}$ 0.01 M. $\alpha_{\text{beg.}} -0.900^\circ$,
 $\alpha_{\text{end}} +0.275^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.900	—	-0.900	—	1.175	—
60	5.0	-0.815	—	-0.815	0.085	1.090	5.44
120	6.0	-0.750	—	-0.750	0.150	1.025	4.94
240	21.0	-0.645	0.005	-0.640	0.260	0.915	4.54
360	20.5	-0.535	0.010	-0.525	0.375	0.800	4.64
540	19.5	-0.420	0.010	-0.410	0.490	0.685	4.34
720	17.5	-0.310	0.010	-0.300	0.600	0.575	4.31
mean value...							4.7

Table XXII.

Influence of ethyl alcohol.

c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$		as in table XXI.				$c_{\text{ethyl alcohol}}$	
Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	5.0	-0.900	—	-0.900	—	1.175	—
60	6.5	-0.820	—	-0.820	0.080	1.095	5.11
120	6.5	-0.755	—	-0.755	0.145	1.030	4.77
240	21.5	-0.640	0.005	-0.635	0.265	0.910	4.63
360	21.5	-0.545	0.010	-0.535	0.365	0.810	4.49
540	20.0	-0.435	0.010	-0.425	0.475	0.700	4.17
720	18.0	-0.320	0.010	-0.310	0.590	0.585	4.21
mean value...							4.6

The result is, as in the previous case, that glucose acts as an inhibitor, although not quite as powerful in this case as in the case of methyl glucoside. A retarding influence of ethyl alcohol cannot be established for the concentrations used here.

From the experiments with addition of glucose the affinity constant for the emulsin-glucose compound was calculated in the same way as indicated for methyl glucoside.

Table XXIII gives the result, which is $K_{m_1} = 0.17$, $K_{M_1} = 5.9$. For K_m is used the value 0.25 determined above.

Table XXIII.

Affinity constant for the compound emulsin-glucose.

$K_m = 0.25$, $S = 0.04$, $G = 0.01-0.12$.

G...	0.00	0.01		0.02		0.04		0.08		0.12	
t	v_0	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v	v	v_0/v
60	0.135	0.125	1.08	0.135	1.00	0.120	1.13	0.085	1.59	0.110	1.23
120	0.260	0.265	0.98	0.245	1.06	0.205	1.27	0.175	1.49	0.175	1.49
240	0.435	0.415	1.08	0.385	1.16	0.400	1.09	0.380	1.15	0.370	1.18
360	0.610	0.550	1.12	0.555	1.10	0.525	1.16	0.455	1.35	0.430	1.41
mean value...		1.06		1.11		1.18		1.40		1.30	
K_{m_1}		0.144		0.156		0.191		0.173		(0.344)	
mean value...		0.17									

JOSEPHSON (1925) has determined the value of K_{M_1} , using different glucosides as test substances. The K_{M_1} values differ from 5.1 to 6.2. We have, with methyl glucoside and ethyl glucoside as test substances, found the values 4.9 and 5.9, i. e. within the limits of the experiment the same value as Josephson found.

It was mentioned above that the emulsin probably was saturated with glucose at a glucose concentration about 0.08 M. This is seen still more clearly here, the value of v_0/v being higher at 0.08 M glucose than at 0.12 M glucose.

The value for K_{M_1} found in these experiments is valid for equilibrium glucose. JOSEPHSON (1925) has found that for α -glucose the value for K_{M_1} is smaller, ca. 4.0. This means that the inhibiting power of the β -glucose set free during the hydrolysis is somewhat greater than calculated from the affinity constant found by the present examination.

Discussion.

At 30° the velocity constant for the enzymic hydrolysis of methyl glucoside is $2.7 \cdot 10^{-2}$, of ethyl glucoside $5.3 \cdot 10^{-2}$. The affinity constants for the compounds of emulsin and the two glucosides are 1.6 and 4.0. These values show that at 30° there is no proportionality between affinity constant and velocity constant.

As the temperature coefficient for the affinity constant of both glucosides is zero, whereas the temperature coefficients for the velocity constants are different from zero ($k_{30}/k_{20} = 2.0$ and 2.4 for methyl and ethyl glucoside respectively), a temperature where the velocity constant is proportional to the affinity constant may be calculated. This temperature is ca. 45°, i. e. too high to allow an experimental control on account of the thermal inactivation of emulsin. On the other hand a temperature may be calculated at which both glucosides are hydrolysed at the same rate. This temperature is ca. 0°. That the rate of hydrolysis at a low temperature is very nearly the same for the two glucosides we have found by means of an experiment where two measuring flasks, filled with solutions 0.0400 M as to the glucosides and with the same emulsin concentration, were placed in an ice-box at a temperature of about 3—4°. Samples were withdrawn at intervals and treated as usual. Tables XXIV and XXV show the result.

The values of k are identical within the limits of the experiment.

This control-experiment may prove that the relation between velocity constant and affinity constant is not a simple one.

Table XXIV.

Methyl glucoside. Rate of hydrolysis 4°.

 c_{emulsin} 0.1978 g in 50 ml. $\alpha_{\text{emulsin}} = -0.385^\circ$. sal. f. = 0.044. $c_{\text{glucoside}}$ 0.0400 M. $\alpha_{\text{beg.}} -0.840^\circ$, $\alpha_{\text{end.}} +0.235^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.840	—	-0.840	—	1.075	—
1440	3.5	-0.735	—	-0.735	0.105	0.975	0.31
3045	23.0	-0.645	0.005	-0.640	0.200	0.875	0.29
4320	3.5	-0.580	—	-0.580	0.260	0.815	0.28
5790	4.0	-0.520	—	-0.520	0.320	0.755	0.27
mean value...							0.29

Table XXV.

Ethyl glucoside. Rate of hydrolysis 4°.

 c_{emulsin} and $c_{\text{glucoside}}$ as in table XXIV. $\alpha_{\text{beg.}} -0.940^\circ$, $\alpha_{\text{end.}} +0.235^\circ$.

Time min.	Samples kept h.	α	corr.	α corr.	x	c-x	$k \cdot 10^4$
0	4.0	-0.940	—	-0.940	—	1.175	—
1440	3.5	-0.810	—	-0.810	0.130	1.045	0.35
3045	23.0	-0.725	0.005	-0.720	0.220	0.955	0.30
4320	3.5	-0.660	—	-0.660	0.280	0.895	0.27
5790	4.0	-0.580	—	-0.580	0.360	0.815	0.27
mean value...							0.30

Summary.

The enzymic hydrolysis of methyl- β -d-glucoside and ethyl- β -d-glucoside has been examined. The reaction constants for 0.04 M solutions and the affinity constants have been determined at 30° and at 20°.

	$\frac{k_{30}^\circ}{e \cdot (\text{sal. f.})}$	$\frac{k_{20}^\circ}{e \cdot (\text{sal. f.})}$	Heat of activation	K_{M30}°	K_{M20}°
Methyl glucoside...	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$1.3_5 \cdot 10^{-2}$	12200 cal	1.6	1.6
Ethyl glucoside...	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	15400 cal	4.0	4.0

The inhibiting effect of the products of hydrolysis has been determined. For the two alcohols no such effect could be observed. Glucose, on the contrary, inhibits the hydrolysis, in the case of methyl glucoside to a higher degree than in the case of ethyl glucoside.

Thanks are due to the Carlsberg Foundation for a grant which enabled one of us (F. E.) to take part in this work.

(From the Chemical Laboratory, University of Copenhagen).

REFERENCES

- BOURQUELOT and BRIDEL (1913). A. Ch. (8) 29, 145.
BRIGGS (1931). Biochem. J. 25, 1801.
COIRRE (1913 1). These, Paris, p. 56.
— (1913 2). Journ. Pharm. Chim. (7) 8, 553.
EULER and LAURIN (1920). Z. physiol. Chem. 110, 55 and 91.
HALDANE-STERN (1932). Allgemeine Chemie der Enzyme p. 119.
JOSEPHSON (1925). Z. physiol. Chem. 147, 1 and 155.
LINEWEAVER and BURK (1934). J. Amer. Chem. Soc. 56, 658.
MICHAELIS and MENTEN (1913). Biochem. Z. 49, 333.
NELSON and BLOOMFIELD (1924). J. Amer. Chem. Soc. 46, 1025.
VEIBEL (1934). Biochem. J. 28, 1733.
VEIBEL and ERIKSEN (1936 1) Bull. soc. chim. [5] 3, 277.
— (1936 2) Biochem. J. 30, 163.
-
-

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 18.

PHYTOCHEMISCHE REDUKTION
VON DIKETONEN

VON

STIG VEIBEL UND ERNA BACH



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Es ist wohlbekannt, dass die verschiedensten Substanzen reduziert werden können, wenn sie zu gärenden Zuckerslösungen hinzugefügt werden. (Literatur bei NEUBERG und GORR, 1928). Wenn aber auch die Reduktionsfähigkeit beinahe universell ist, so ist jedoch die Geschwindigkeit, mit der die Reduktion stattfindet, von der Konstitution der zu reduzierenden Verbindung abhängig. Benzoin entsteht z. B. ohne Schwierigkeit durch Reduktion von Benzil; die weitere Reduktion geht aber überaus langsam.

NEUBERG und KOMAREWSKI (1927) und v. FALKENHAUSEN (1930) haben gefunden, dass die Reduktion von Methylbenzoylkarbinol, $\text{CH}_3 \cdot \text{CHOH} \cdot \text{CO} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$, keine solchen Schwierigkeiten darbietet; es scheint also, als ob es nicht die Gruppierung $-\text{CHOH} \cdot \text{CO} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$ ist, die besonders reduktionshemmend wirkt.

Die Spezifität, die sich in solchen Reduktionsversuchen äussert, lässt sich am besten als eine Wasserstoffacceptorspezifität auffassen (v. FALKENHAUSEN, l. c. p. 245). Es handelt sich nicht um eine absolute Spezifität; selbst bei Benzoin lässt sich eine Reduktion nachweisen, so dass man auch hier nur eine relative Spezifität anzunehmen braucht.

Für die Untersuchung der relativen Spezifität reduzierbarer Gruppen scheinen solche Substanzen besonders geeignet, die zwei identische reduzierbare Gruppen enthalten, an welchen verschiedene Atome oder Atomgruppen gebunden sind. Solche Substanzen sind z. B. die Diketone.

Nur wenige Fälle phytochemischer Reduktion von Diketonen sind beschrieben worden. Wir haben drei gefunden: Benzil (NEUBERG und NORD, 1919), Diacetyl (NAGELSCHMIDT, 1927) und Xylochinon (NEUBERG und SIMON, 1926). Da alle diese drei Diketone symmetrisch gebaut sind, hat man aus den Ergebnissen ihrer Reduktion keine Rückschlüsse auf die Bedeutung der an den Carbonylgruppen gebundenen Radikalen für die Reduzierbarkeit derselben ziehen können.

Wir haben jetzt die phytochemische Reduktion eines unsymmetrischen Diketons, Acetylpropionyl oder Pentandion-(2,3), untersucht. Diese Substanz liess sich in wenigen Tagen in ein Ketol überführen, welches als Semicarbazon isoliert wurde. Der Schmelzpunkt des isolierten Semicarbazons lässt vermuten, dass das Ketol Pentanol-(2)-on-(3) ist.

Die partielle Reduktion des Diketons zum Ketol und die vollständige Reduktion desselben zum Glykol sind simultan verlaufende Prozesse (vgl. NAGELSCHMIDT, 1927). Selbst bei unvollständiger Reduktion haben wir das gebildete Glykol isolieren können. Dasselbe ist optisch aktiv, und wir haben in verschiedenen Versuchen spezifische Drehungen bis zu $+15^\circ$ verzeichnen können.

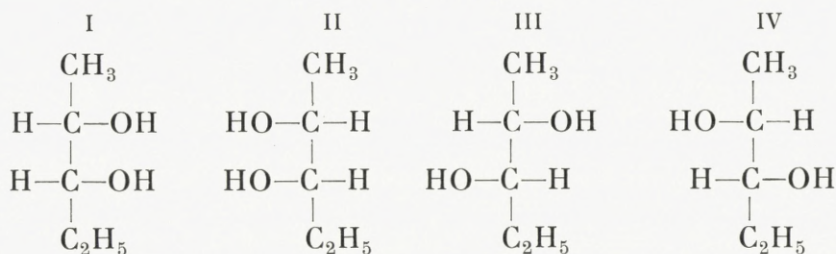
In anderen Versuchen haben wir die Reduktion fort-dauern lassen, bis sowohl Diketon als Ketol verschwunden waren. In solchen Fällen haben wir bis zu 67 % der theoretischen Glykolausbeute isolieren können. Das Glykol war auch hier immer rechtsdrehend; die spezifische Drehung war aber nicht so hoch wie im Falle der unvollständigen Reduktion. Bei fraktionierter Destillation liess das Glykol sich in Fraktionen trennen, die verschiedene spezifische Drehungen zeigten.

Vom Glykolegemisch haben wir das Bis-phenylurethan-Gemisch dargestellt. Dasselbe liess sich durch fraktionierte

Kristallisation in zwei Fraktionen trennen, deren spezifische Drehungen, $+1,60^\circ$ und $-7,43^\circ$, sich durch weitere Kristallisationen nicht mehr änderten. Die beiden Bis-phenylurethane wurden mittels alkoholischem Natriumhydroxyds hydrolysiert, und die beiden Glykole wurden isoliert. Die spezifischen Drehungen derselben betragen $+16^\circ$ und etwa $-16^\circ \pm 3^\circ$; vom letzten Glykol wurden nur 0,075 g isoliert, so dass der angegebene Wert der spezifischen Drehung nur als approximativ zu betrachten ist.

Bei der Reduktion des Diketons können zuerst vier verschiedene Ketole entstehen, von denen zwei die Spiegelbilder der beiden anderen sind. Bei weiterer Reduktion können aus jedem der vier Ketole zwei Glykole entstehen, im Ganzen aber nur vier verschiedene Individuen, und von diesen vier Glykolen sind wiederum zwei die Spiegelbilder der beiden anderen.

Die vier möglichen Glykole sind:



Die zwei Glykole, die isoliert worden sind, sind wahrscheinlich Gemische von I und II und von III und IV. Ob das rechtsdrehende Gemisch aus I + II oder aus III + IV besteht, haben wir nicht entscheiden können.

Das direkt isolierte Glykolgemisch zeigt eine spezifische Drehung von $+8$ — $+10^\circ$. Es wird also vorwiegend das rechtsdrehende Glykol gebildet.

Wie oben erwähnt, kann man bei unvollständiger Re-

duktion ein Glykol mit spezifischer Drehung bis $+15^\circ$ isolieren, d. h., dass das linksdrehende Glykol erst gegen Ende der Reduktion gebildet wird.

Falls die Annahme richtig ist, dass das Ketol, das in den Versuchen mit unvollständiger Reduktion isoliert wurde, Pentanol-(2)-on-(3) ist, kann man daraus schliessen, dass diejenige Ketogruppe, die der Methylgruppe benachbart ist, am leichtesten reduziert wird. Eine andere Möglichkeit wäre jedoch, dass sowohl die Bildung als die Weiterreduktion des Pentanol-(3)-ons-(2) sehr viel schneller verläuft, als die entsprechenden Reaktionen des Pentanol-(2)-ons-(3).

Nicht nur die an den Ketogruppen haftenden Radikale können die Fähigkeit der Ketogruppen, als Wasserstoffacceptoren zu funktionieren, beeinflussen. Auch die gegenseitige Stellung dieser Gruppen ist von Bedeutung, wie ein Vergleich der Reduktion von Acetylpropionyl mit der Reduktion von Acetylaceton lehrt. Die phytochemische Reduktion des Acetylpropionyls (mit den in diesen Versuchen benutzten Substanzmengen) war in etwa 10 Tagen beendet, die des Acetylacetons dagegen war selbst nach 28 Tagen noch nicht fertig. Dass es sich im letztgenannten Fall nicht um eine Vergiftung der Hefe handelt, scheint dadurch sichergestellt, dass während der ganzen Versuchsdauer eine Kohlensäureentwicklung stattfindet.

Auch diese Spezifität ist keine absolute. Zwei Versuche mit verschiedener Versuchsdauer haben gezeigt, dass während des Versuches Acetylaceton verbraucht wird. Es ist uns jedoch nicht gelungen, die Reduktionsprodukte zu identifizieren.

Die Kombination $-\text{CO} \cdot \text{CH}_2\text{CO}-$ oder $-\text{CHOH} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CO}-$ scheint in anderen Verbindungen kein Hindernis für die phytochemische Reduktion zu sein. FRIEDMAN (1932) hat

gezeigt, dass Acetessigsäure leicht zu d-(+)- β -Oxybuttersäure reduziert wird, und LEVENE (1931), dass aus 4-Oxybutanon-(2) Butandiol-(1,3) entsteht. FRIEDMAN hat bei p_H 2–4 gearbeitet und wir bei p_H 3–4; die langsame Reduktion des Acetylacetons scheint also nicht durch eine ungünstige Wasserstoffionenkonzentration verursacht zu sein. Weitere Untersuchungen mögen zeigen, ob die Gruppierung $R \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CO \cdot R$ im Allgemeinen schwer reduzierbar ist, oder ob man bei Acetylaceton zur Annahme einer spezifischen Hemmung genötigt ist.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass sowohl die Struktur der an die Ketogruppen gebundenen Alkylgruppen wie die gegenseitige Lage der Ketogruppen von Bedeutung für ihre Fähigkeit, als Wasserstoffacceptoren zu dienen, ist.

Die Untersuchung beider Arten von Spezifität wird fortgesetzt.

Versuchsteil.

A. Partielle Reduktion von Acetylpropionyl.

250 g Rohrzucker wurden in 1500 ccm Leitungswasser von 40° gelöst. 125 g Brennereihefe wurden zugesetzt. Wenn nach kurzer Zeit die Kohlendioxydentwicklung im Gange war, wurden 20 ccm (19,4 g; Reinheit etwa 90 %) Acetylpropionyl, in 40 ccm Alkohol gelöst, langsam hinzugefügt, wodurch die Kohlensäureentwicklung nicht beeinflusst wurde. Das Acetylpropionyl wurde uns von Herrn CHR. LUNDSGAARD, Grindstedværket, überlassen: wir möchten nicht unterlassen, ihm auch an dieser Stelle unseren Dank auszusprechen.

Das Gemisch wurde bei gewöhnlicher Temperatur aufbewahrt. In täglichen Proben wurde nach LEMOIGNE (1923, vgl. KLUYVER und Mitarb., 1925) untersucht, ob noch Diketon

vorhanden war. Die Kohlensäureentwicklung liess nach 4—5 Tagen nach. Zur Weiterführung der Reduktion wurden dann 125 g Rohrzucker in 200 ccm Leitungswasser und 100 g Brennereihefe hinzugefügt. Nach 5—6 Tagen war kein Diketon mehr nachweisbar. Das Gemisch wurde dann bis auf 80° erwärmt, um die enzymatischen Prozesse zu unterbrechen. Danach wurde filtriert, zuerst durch einen mit Kieselgur imprägnierten Filter und dann durch einen Berkefeld-Filter. Das klare Filtrat wurde im Vakuum bei 35—40° möglichst weit eingengt.

Das gebildete Ketol befindet sich im Destillat. Um die Menge desselben festzustellen, wurde $\frac{1}{10}$ des Destillats mit einer Lösung von Dinitrophenylhydrazin in Salzsäure gefällt. Hierdurch wurden gewonnen 0,43 g einer Substanz, die wegen ihrer Farbe und Löslichkeitsverhältnissen als das Dinitrophenylhydrazon des Ketols betrachtet werden konnte, und 0,11 g einer anderen Substanz, die aus denselben Gründen als das Bis-dinitrophenylhydrazon des Diketon aufgefasst wurde. Hiernach enthalten die restierenden $\frac{9}{10}$ des Destillats 1,6 g Ketol, wovon 2,5 g Semicarbazon gebildet werden können.

Um das Ketol als Semicarbazon zu isolieren, wurden dem Destillat 20 g Semicarbazidchlorhydrat und 20 g Kaliumacetat hinzugefügt. Das Gemisch wurde im Vakuum eingengt. Während des Konzentrierens schied sich ein kristallinischer Niederschlag aus, der abfiltriert wurde. Das Filtrat wurde weiter eingengt und nochmals filtriert. Der erste Niederschlag wog 2,0 g und zeigte den Schmelzpunkt 182—84°, der letzte schmolz unscharf bei 160—70° und wog 1,4 g.

Die beiden Niederschläge enthielten Kaliumchlorid. Sie wurden vereinigt und aus 85 ccm Wasser kristallisiert. Hierdurch wurden gewonnen 1,8 g mit Schmp. 188—89° (langsam

erwärmt) oder $197-98^{\circ}$ (schnell erwärmt) und $[\alpha]_D^{18} = +4,8^{\circ}$ (Wasser, $c = 1,017$). Eine zweite Umkristallisation lieferte $0,8$ g mit Schmp. $203-04^{\circ}$ (schnell erwärmt), $[\alpha]_D^{18} = +2,10^{\circ}$. Aus dem Filtrat hiervon liessen sich $0,5$ g mit Schmp. $170-75^{\circ}$, $[\alpha]_D^{18} = +15,4^{\circ}$ gewinnen.

In einem anderen Versuch wurde ein Semicarbazon mit Schmp. $205-07^{\circ}$ und $[\alpha]_D^{18} = +3,9^{\circ}$ gewonnen. Eine Mischprobe der beiden Präparate mit $[\alpha]_D^{18} = +2,10^{\circ}$ und $[\alpha]_D^{18} = +3,9^{\circ}$ zeigte keine Depression. Dass die spezifische Drehung der beiden Präparate verschieden ist, könnte bedeuten, dass die beiden Semicarbazone wohl von demselben Ketol gebildet sind, dass aber das Verhältnis zwischen d- und l-Form in den beiden Präparaten nicht dasselbe ist.

Dass es sich tatsächlich um ein Semicarbazon eines Pentanolons handelt, wurde gezeigt durch Bestimmung seines Äquivalentgewichts nach einer Methode, die der eine von uns angegeben hat, Hydrolyse des Semicarbazons durch Kochen mit Schwefelsäure, Oxydation des gebildeten Hydrazins mit Jodsäure und Abtreibung des Ammoniaks mit Natron (VEIBEL, 1927). $0,1744$ g Substanz lieferten eine NH_3 -Menge, die $11,15$ ccm $0,0990$ n HCl verbrauchte.

Äquivalentgewicht gef. Semicarbazon	158,0,	Ketol	101,0
,,	ber.	,,	159,1
			,, 102,1

Dem Schmelzpunkte des Semicarbazons nach ist das Ketol Pentanol-(2)-on-(3), indem Venus-Daniloff (1928) für den Schmelzpunkt des Semicarbazons des Pentanol(-2)-on-(3) $208-09^{\circ}$, für das des Pentanol-(3)-on-(2) $216-17^{\circ}$ angibt.

Die kleine Menge Semicarbazon mit niedrigerem Schmelzpunkt und höherer spezifischer Drehung können als Gemische der beiden isomeren Semicarbazone betrachtet werden.

Selbst bei unvollständiger Reduktion wird etwas Glykol

gebildet, welches sich im Remanens der ersten Vakuumdestillation befindet. Um den Rückstand von den beigemischten Hefeproteinstoffen zu trennen, wurde er in 100 ccm absolutem Alkohol gelöst. Die Lösung wurde mit 500 ccm Äther gefällt, die Flüssigkeit abdekantiert und in Vakuum möglichst weit eingengt. Der Rückstand wurde abermals in absolutem Alkohol gelöst (50 ccm) und die Lösung mit 200 ccm absolutem Äther gefällt. Das Dekantat wurde wiederum eingedampft. Der Rückstand löste sich jetzt klar im Gemisch von 25 ccm abs. Alkohol und 25 ccm abs. Äther.

Das Glykol wurde isoliert durch fraktionierte Vakuumdestillation dieser Alkohol-Äther-Lösung. Die Ausbeute war einmal 4 g mit Kp_{20} 98—101° und $[\alpha]_D^{19} = +15,3^\circ$, ($\alpha^{19} = +14,97^\circ$, $l = 1$, $d = 0,98$), ein anderes Mal 8,6 g mit Kp_{30} 102—05° und $[\alpha]_D^{18} = +11,46^\circ$ ($\alpha^{18} = +11,24^\circ$, $l = 1$, $d = 0,98$). Es scheint nach diesen Versuchen, als ob das zuerst gebildete Glykol das stärker rechtsdrehende ist.

B. Vollständige Reduktion von Acetylpropionyl.

Die Versuche wurden ausgeführt wie oben, nur wurde die Reduktion fortgesetzt, bis das Ketol nicht mehr nachweisbar war (Probe nach KLUYVER und Mitarbeitern, 1925). Es musste 3 Mal neue Zuckerlösung und Hefesuspension hinzugefügt werden. Wie oben erwähnt verlaufen die beiden Reduktionen (von Diketon und von Ketol) nebeneinander. Das Diketon war schon nach 3—6 Tagen verschwunden, das Ketol erst nach etwa 10 Tagen, das Glykol war aber schon nach 1—2 Tagen nachweisbar. Dieses Ergebnis stimmt mit dem Befund NAGELSCHMIDTS (1927) für das niedrigere Homologe, Diacetyl, überein. Die Wasserstoffionenkonzentration der Lösung wurde während der Reduktion elektrometrisch bestimmt (Chinhydronelektrode).

Dauer des Versuches, Tage	1	3	5	6	8	10
P _H	3,3	3,9	3,7	3,7	3,8	3,9

Nach Beendigung der Reduktion wurden die enzymatischen Prozesse durch Erwärmung des Reaktionsgemisches auf 80° unterbrochen. Das Glykol wurde wie oben beschrieben isoliert.

Die Ausbeuten an Pentandiol waren in 3 Versuchen, mit je 18 g Acetylpropionyl:

1. 12 g Glykol Kp₁₇ 90—100° $[\alpha]_D^{19} = + 8,94^\circ$
($\alpha^{19} = + 8,76^\circ$, l = 1, d = 0,98)
2. 12 g „ Kp₁₇ 90—97° $[\alpha]_D^{19} = + 9,31^\circ$
($\alpha^{19} = + 9,13^\circ$, l = 1, d = 0,98)
3. 13,1 g „ Kp₁₃ 87—91° $[\alpha]_D^{19} = + 9,63^\circ$
($\alpha^{19} = + 9,46^\circ$, l = 1, d = 0,98)

Für racemisches Pentandiol-(2,3) wird angegeben Kp₁₇ = 96,5—97°, Kp₇₆₀ = 187,5°, d = 0,98.

Die beiden ersten Glykolpräparate wurden vereinigt und aus einem Ölbade beim Atmosphärendruck destilliert. Es wurden 2 Fraktionen aufgesammelt:

1. Kp₇₇₄ 184—90° 4,5 g $[\alpha]_D^{19} = + 8,18^\circ$
($\alpha^{19} = + 8,02^\circ$, l = 1, d = 0,98)
2. Kp₇₇₄ 190—96° 10,7 g $[\alpha]_D^{19} = + 10,06^\circ$
($\alpha^{19} = + 19,73^\circ$, l = 2, d = 0,98)

Eine systematische Fraktionierung liess sich mit den kleinen Mengen nicht durchführen. Das aus dem Glykolgemisch gebildete Bis-phenylurethangemisch liess sich dagegen durch Kristallisation fraktionieren.

Die Bildung des Bis-phenylurethans war quantitativ. Z. B. wurden 13 g Glykol und 30 g Phenylisocyanat (2 mol)

in 300 ccm Ligroin gelöst und unter Rückflusskühlung einige Stunden auf dem Dampfbad erhitzt. Bei der Abkühlung schied sich ein Niederschlag aus, der abfiltriert und gründlich mit Ligroin gewaschen wurde. Ausbeute 43 g. 52 g Bisphenylurethan wurden der fraktionierten Kristallisation aus mehr oder weniger verdünntem Alkohol unterworfen. Das Fortschreiten der Trennung wurde verfolgt durch Bestimmung des Schmelzpunktes und der spezifischen Drehung der verschiedenen Fraktionen. Durch etwa 250 Kristallisationen wurden 3 verschiedene Substanzen erhalten, die ihren Schmelzpunkt oder ihre spezifische Drehung nicht mehr änderten, auch nicht nach Umkristallisation aus anderen Lösungsmitteln wie Alkohol.

Die Konstanten der 3 Substanzen waren:

	Menge	Schmp.	$[\alpha]_D^{20}$	Lösungsmittel	Konz. ¹
I	15,5 g	189—90°	+ 1,60°	Diäthylketon	12,01
II	5,5 g	168—69°	— 7,43°	Diäthylketon	5,04
III	0,2 g	152—53°	+ 40,84°	Alkohol	1,21

Ausserdem kristallisierten etwa 10 g mit unscharfem Schmelzpunkt und mit spezifischer Drehung etwa -2° , d. h. wahrscheinlich Gemische der beiden Substanzen I und II.

Die Substanz I war ziemlich schwerlöslich in Alkohol (Löslichkeit ca. 2,5 ‰). Bei der niedrigen spezifischen Drehung ($+1,6^\circ$) ist die Bestimmung derselben in Alkohol ziemlich ungenau (Drehung der gesättigten alkoholischen Lösung im 2 dm Rohr nur ca. $0,08^\circ$). Wir haben deshalb nach einem Lösungsmittel gesucht, in welchem die Löslichkeit grösser ist als in Alkohol. Wir haben zuerst Dioxan versucht. Die Löslichkeit ist hier bedeutend; eine Lösung mit $c = 12,4$ lässt sich leicht bereiten. Die Grösse der spezi-

¹ Konzentrationen wie üblich als g in 100 ccm Lösung angegeben.

fischen Drehung in Dioxan ist aber sehr konzentrationsabhängig, und nicht nur der numerische Wert, sondern auch der Drehungssinn ändert sich mit der Konzentration. Eine Lösung mit $c = 2,5$ zeigte im 2 dm Rohr eine Drehung von $+0,015^\circ$, $[\alpha]_D$ also $+0,3^\circ$ ($\pm 30\%$ da die Noniusablesung keine grössere Genauigkeit als $0,005^\circ$ erlaubt), eine Lösung mit $c = 12,4$ dagegen eine Drehung von $-0,14^\circ$, $[\alpha]_D = -0,6^\circ$.

Wir haben dann Diäthylketon als Lösungsmittel versucht. Die Löslichkeit ist hier ebenso gross wie in Dioxan, und die spezifische Drehung scheint konzentrationsunabhängig zu sein.

$$c = 12,0 \quad \alpha^{19} = +0,385^\circ \quad l = 2 \quad [\alpha]_D^{19} = +1,6^\circ$$

$$c = 2,53 \quad \alpha^{20} = +0,075^\circ \quad l = 2 \quad [\alpha]_D^{20} = +1,5^\circ$$

Die Drehung in Diäthylketon ist also von derselben Grösse wie in Alkohol.

Es wurde analytisch festgestellt, dass die Substanz I ein Bis-phenylurethan eines Pentandiols ist:

0,1027 g Substanz lieferten 0,2528 g CO_2 und 0,0586 g H_2O .

0,1713 g Substanz lieferten eine NH_3 -Menge, die 10,32 ccm 0,0977 n HCl entsprachen.

$\text{C}_{19}\text{H}_{22}\text{O}_4\text{N}_2$ ber. C = 66,63, H = 6,49, N = 8,18 %
(342,2) gef. C = 67,14, H = 6,38, N = 8,24 %

Um aus dem Bis-phenylurethan das freie Glykol zu gewinnen, wurden 13 g Bis-phenylurethan mit einer Lösung von 12 g NaOH in 200 ccm Wasser und 60 ccm Alkohol übergossen. Das Gemisch wurde dann 20 Stunden unter Rückflusskühlung gekocht. Das Bis-phenylurethan ging hierdurch bis auf wenige Flocken in Lösung, indem es zu Pentandiol, Anilin und Natriumcarbonat hydrolysiert wurde.

Die Lösung wurde filtriert, und das Filtrat bis zur neutralen Reaktion gegen Lackmus mit Schwefelsäure versetzt. Dann wurde auf dem Dampfbad eingeeengt, bis die Salze eben noch feucht waren. Die feuchte Salzmasse wurde innig mit wasserfreiem Natriumsulfat gemischt, das trockene Gemisch in einen Soxhletapparat gebracht und 20 Stunden mit Äther extrahiert. Die Ätherlösung wurde eingedampft und der Rückstand aus einem Ölbad destilliert. Die Ausbeute war 0,6 g mit Kp_{751} 180—86°. Die Drehung dieses Glykols war, in einem 1 dm-Rohr gemessen, +16,0°. d ist beim raze-mischen Glykol 0,98. Wird hier mit demselben Wert gerechnet, ist $[\alpha]_D^{20} = +16,3^\circ$. In alkoholischer Lösung bestimmt, ist die spezifische Drehung etwas grösser, $c = 1,544$, $l = 2$, $\alpha^{20} = +0,59^\circ$, $[\alpha]_D^{20} = +19^\circ$.

Wir können also feststellen, dass die Substanz I das Bis-phenylurethan des am stärksten rechtsdrehenden Pentandiols-(2,3) ist.

Die Substanz II ist in Alkohol noch weniger löslich als I. Die Löslichkeit beträgt nur etwa 1,6 0/0. $[\alpha]_D^{20}$ ist $-7,9^\circ$ (Alkohol, $c = 1,516$). Eine Analyse bestätigte, dass auch diese Substanz ein Bis-phenylurethan eines Pentandiols ist:

0,1022 g Substanz lieferten 0,2509 g CO_2 und 0,0584 g H_2O .

0,1542 g Substanz lieferten eine NH_3 -Menge, die 9,15 ccm 0,0977 n HCl entsprachen.

$C_{19}H_{22}O_4N_2$	ber. C = 66,63, H = 6,49, N = 8,18 0/0
342,2	gef. C = 66,95, H = 6,39, N = 8,12 0/0

Um einen direkten Vergleich der Drehungen der beiden Bis-phenylurethane zu ermöglichen, haben wir die Drehung von II in Diäthylketon bestimmt und den Wert $[\alpha]_D^{20} = -7,43^\circ$ gefunden ($c = 5,038$). Der Löslichkeitsunterschied der beiden Substanzen ist in Diäthylketon noch grösser als in Alkohol.

Von I ist eine 12 %ige Lösung noch nicht gesättigt, von II ist eine 5 %ige Lösung schon nahe am Sättigungspunkt.

Die Hydrolyse von II (5 g) wurde in derselben Weise vorgenommen wie von I, doch liess sich II in 20 Stunden nicht vollständig hydrolysieren; der abfiltrierte Rückstand, der bei I kaum wägbare war, betrug bei II beinahe 2 g, deren Identität mit dem Ausgangsmaterial festgestellt wurde. Das Glykol wurde isoliert wie bei I. Die Ausbeute war nur 0,075 g. Diese Substanzmenge ist zu klein um eine genaue Bestimmung der spezifischen Drehung zu erlauben. Eine Schätzung derselben haben wir vorgenommen, indem wir die 0,075 g mit absolutem Alkohol auf 5 ccm aufgefüllt haben. Die Drehung dieser Lösung in einem 2 dm Rohr war $-0,06^\circ$, d. h. $[\alpha]_D^{20} = -16^\circ$ ($c = 0,1514$). Da die Lösung etwas gelbgefärbt war, ist die Bestimmung des Drehungswinkels nur auf $0,01^\circ$ genau, d. h. die Unsicherheit ist etwa 16 %. $[\alpha]_D^{20}$ ist also $-16^\circ \pm 3^\circ$.

Eine Analyse der Substanz III scheint zu zeigen, dass es sich um ein Bis-phenylurethan eines Propandiols handelt.

0,0870 g Substanz lieferten 0,2085 g CO_2 und 0,0436 g H_2O .

9,725 mg Substanz lieferten eine NH_3 -Menge, die 0,621 ccm 0,1000 n HCl entsprachen.

$\text{C}_{17}\text{H}_{18}\text{O}_4\text{N}_2$	ber. C = 64,95, H = 5,76, N = 8,92 %
314,1	gef. C = 65,36, H = 5,62, N = 8,94 %

Da wir nur über 0,2 g dieser Substanz verfügten, konnten wir eine genauere Untersuchung nicht durchführen.

Propylenglykol entsteht in geringer Menge bei der Vergärung von Rohrzucker. Für das Bis-phenylurethan des d,l-Propylenglykols wird Schmp. $152-53^\circ$ angegeben. Da unsere Substanz denselben Schmelzpunkt zeigt, ist es wahrscheinlich, dass die Substanz III das Bis-phenylurethan eines mehr oder weniger optisch reinen Propylenglykols ist.

C. Reduktion von Acetylaceton.

Die Reduktionsversuche wurden genau wie beim isomeren Diketon ausgeführt. Die Hinzufügung von 20 g Acetylaceton, in 40 ccm Alkohol gelöst, zur gärenden Zuckerlösung hat keine Unterbrechung der Gärung verursacht. Als die Gärung nach einigen Tagen nachliess, wurden neue Zuckerlösung und Hefesuspension zugesetzt. Mit Zwischenräumen von 2—3 Tagen wurden Proben entnommen, um zu sehen, ob noch β -Diketon vorhanden war. (Probe nach THIELE und STEIMMIG (1907), Bildung eines intensiv violettrot gefärbten Salzes eines Heptazins bei der Reaktion zwischen β -Diketon und o-Toluylendiamin in saurer Lösung). Nach 14 Tagen wurde die Gärung unterbrochen, wenn auch immer noch β -Diketon nachweisbar war.

Aus der Reaktionslösung wurden noch vorhandenes Diketon und eventuell gebildetes Ketol durch 14-stündige Extraktion ausgeäthert. Die ätherische Lösung wurde über Pottasche getrocknet, der Äther abgedampft und der Rückstand in Vakuum fraktioniert. Bei 35—40° (17 mm) wurden 10,5 g aufgesammelt. Diese Fraktion war schwach linksdrehend, $[\alpha]_D^{19} =$ etwa $-0,4^\circ$, wahrscheinlich weil sie etwas Ketol enthielt.

Die Hauptmenge dieser Fraktion war aber Acetylaceton. Dieses wurde als Kupfersalz zur Wägung gebracht. Getrocknet bei 110° wog das Kupfersalz 10,5 g, was 8,0 g Acetylaceton entspricht. Im wässrigen Filtrat vom Kupfersalz wurde versucht, das Ketol als Dinitrophenylhydrazon zu erfassen. Bei der Hinzufügung einer Lösung von Dinitrophenylhydrazin in Salzsäure entstand auch ein Niederschlag, der aus Alkohol umkristallisiert bei 187° unter Destruktion schmolz. Eine Mischprobe mit Dinitrophenylhydrazin (F. 194°) schmolz schon bei 175°, so dass die isolierte Sub-

stanz nicht Dinitrophenylhydrazin ist, das durch Hydrolyse des Chlorhydrats bei der Verdünnung entstanden sein könnte.

In einem anderen Versuch wurde die Gärdauer auf 28 Tage erstreckt. Selbst hier war das β -Diketon nicht ganz verschwunden; die Menge des Kupfersalzes betrug aber diesmal weniger als 2 g. Ein Dinitrophenylhydrazon wurde auch hier isoliert. Durch Umkristallisation aus Pyridin-Eisessig wurde der Schmelzpunkt auf $190-95^\circ$ (Destruktion) gebracht. Die Menge war aber zu klein, um eine genauere Untersuchung zu erlauben.

Das eventuell gebildete Glykol befindet sich in der wässerigen Lösung, aus welcher Diketon und Ketol durch Extraktion mit Äther entfernt worden sind. Diese Lösung wurde filtriert, das Filtrat im Vakuum eingeeengt und der Rückstand mit Alkohol und Äther behandelt wie unter A beschrieben. Zuletzt wurde im Vakuum fraktioniert, und es wurden 1—2 g einer viscosen Flüssigkeit mit Kp_{30} $130-35^\circ$ gewonnen, die wahrscheinlich das erwartete Glykol ist. Bei dem Versuch, ein Bis-phenylurethan darzustellen, schien die Substanz aber Wasser abzugeben; jedenfalls entstanden statt des erwarteten Urethans reichliche Mengen von Diphenylharnstoff.

Die Reduktionsversuche mit Acetylaceton haben also keine entscheidenden Ergebnisse gebracht. Es scheint aber, als ob eine Reduktion stattfindet, wenn auch sehr langsam, und dass hier, wie in den übrigen untersuchten Fällen, ein Ketol die erste Reduktionsstufe ist.

Zusammenfassung.

1. Die phytochemische Reduktion von Acetylpropionyl $\text{CH}_3 \cdot \text{CO} \cdot \text{CO} \cdot \text{C}_2\text{H}_5$ ist untersucht worden. Es wurde gefun-

den, dass bei vollständiger Reduktion zwei stereoisomere Glykole entstehen, die durch Kristallisation ihrer Bis-phenylurethane getrennt werden könnten. Die spezifischen Drehungen der beiden Glykole wurden zu $+16^\circ$ und etwa -16° gefunden.

2. Wenn die Reduktion unterbrochen wird, ehe sie vollendet ist, wird hauptsächlich das Glykol mit $[\alpha]_D^{20} = +16^\circ$ gebildet. In diesem Falle wurde ein Ketol, Zwischenprodukt bei der Glykolbildung, als Semicarbazon in sehr geringen Mengen isoliert. Nach dem Schmelzpunkt des Semicarbazons scheint das Ketol Pentanol-(2)-on-(3) zu sein.

3. Die phytochemische Reduktion von Acetylaceton ist untersucht worden. Die Reduktion verläuft sehr viel langsamer als beim isomeren α -Diketon. Die Reduktionsprodukte konnten nicht mit Sicherheit identifiziert werden.

(Aus dem chemischen Laboratorium der Universität und dem pflanzenphysiologischen Laboratorium der kgl. tierärztlichen und landwirtschaftlichen Hochschule, Kopenhagen).

LITERATUR

- v. FALKENHAUSEN (1930), *Biochem. Z.* 219, 241.
FRIEDMAN (1932), *Biochem. Z.* 244, 43.
KLUYVER, DONKER und VISSER'T HOOFT (1925), *Biochem. Z.* 161, 361.
LEMOIGNE (1923), *Compt. rend. Acad. Sc.* 177, 652.
LEVENE (1931), *J. Biol. Chem.* 94, 361.
NAGELSCHMIDT (1927), *Biochem. Ztschr.* 186, 318.
NEUBERG und GORR (1928), *Oppenheimer-Pincussen: Die Methodik der Fermente* p. 1212.
NEUBERG und KOMAREWSKI (1927), *Biochem. Z.* 182, 285.
NEUBERG und NORD (1919), *Ber. Dtsch. chem. Ges.* 52, 2248.
NEUBERG und SIMON (1926), *Biochem. Z.* 171, 256.
THIELE und STEIMMIG (1907), *Ber. Dtsch. chem. Ges.* 40, 955.
VEIBEL (1927), *Bull. Soc. chim.* (4) 41, 1410.
VENUS-DANILOFF (1928), *Bull. Soc. chim.* (4) 43, 582.
-
-

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII**, 19.

ON COMPLEX CALCIUM CITRATE

BY

JYTTE MUUS AND HERBERT LEBEL



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

The hypothesis that calcium ions form a complex with citrate ions was first put forward by SABBATANI (1) and has since then been generally accepted. The hypothesis has found support in works on the conductivity of solutions of calcium salts and citrates by SHEAR and KRAMER (2), SHEAR, KRAMER and RESNIKOFF (3), WILEY (4), and MULLI and STANDENATH (5), in studies on the solubility of calcium carbonate in solutions of sodium citrate by HASTINGS, MURRAY, and SENDROY (6), and biological experiments by CLARK, PERCIVAL and STEWART (7), STEWART and PERCIVAL (8), SHELLING, and MARSLOW (9) and others, but the first quantitative determination of the ionization constant of calcium citrate was made by HASTINGS, McLEAN, EICHELBERGER, HALL and DA COSTA (10).

The findings of these authors are in agreement with the following scheme of reaction



and the dissociation constant of the complex

$$\frac{C_{\text{Ca}^{++}} C_{\text{Cit}^{---}}}{C_{\text{CaCit}^{-}}} = K_{\text{CaCit}^{-}} \quad (2)$$

was found to be $K = 6.0 \cdot 10^{-4}$ at 22° – 23° C. ionic strength $\mu = 0.155$ – 0.163 and $\text{pH} = 7.4$.

The amount of ionized calcium was determined by means of the amplitude of contraction of an isolated frog heart, a method described by McLEAN and HASTINGS (11).

Though this work leaves no doubt as to the correctness of the above assumption, it was thought desirable to extend the investigation to a greater range of pH and μ . This could not be done by the frog heart method, and another method was adopted.

Theoretical.

In the present investigation the concentration of calcium ions was determined by the solubility of calcium iodate. The solubility of calcium iodate $\text{Ca}(\text{IO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ has been determined by KILDE (12) who found the activity solubility constant L_0 as given by relation

$$\begin{aligned} L_0 = A_{\text{Ca}^{++}} \cdot A_{\text{IO}_3^-}^2 &= C_{\text{Ca}^{++}} \cdot f_{\text{Ca}^{++}} \cdot C_{\text{IO}_3^-}^2 \cdot f_{\text{IO}_3^-}^2 = \left. \right\} (3) \\ &= L \cdot f_{\text{Ca}^{++}} \cdot f_{\text{IO}_3^-}^2 = L \cdot f_{\text{Ca}(\text{IO}_3)_2}^3 \end{aligned}$$

($A_{\text{Ca}^{++}}$ and $A_{\text{IO}_3^-}$ are the activities of calcium ions and iodate ions respectively, $f_{\text{Ca}^{++}}$ and $f_{\text{IO}_3^-}$ are the activity coefficients of calcium ions and iodate ions. $L = C_{\text{Ca}^{++}} \cdot C_{\text{IO}_3^-}^2$ is the concentration solubility constant and $f_{\text{Ca}(\text{IO}_3)_2} = \sqrt[3]{f_{\text{Ca}^{++}} \cdot f_{\text{IO}_3^-}^2}$ is the mean activity coefficient of the ions of calcium iodate.)

at 25°C. to be $L_0 = 0.736 \cdot 10^{-6}$.

KILDE also found that the relation between the mean activity coefficient and the ionic strength μ could be expressed as follows:

$$\text{pf}_{\text{Ca}(\text{IO}_3)_2} = 1.008 \sqrt{\mu} - 0.78 \mu \quad \text{at } 25^\circ\text{C}. \quad (4)$$

This formula is valid up to $\mu = 0.2$, i. e. if the ionic strength of a solution is known and lies within the limits $0 < \mu < 0.2$

the mean activity coefficient and hence the concentration solubility constant can be calculated.

The calcium ion concentration of a solution saturated with calcium iodate is given by

$$C_{\text{Ca}^{++}} = \frac{L}{C_{\text{IO}_3^-}^2} \quad (5)$$

or under the assumption that all iodate present as ionized

$$C_{\text{Ca}^{++}} = \frac{L}{(C_{\text{total iodate}})^2} \quad (6)$$

If a solution contains a constituent, say citrate, that combines with calcium ions forming a complex, the concentration of this complex can be calculated by difference

$$C_{\text{CaCit}^-} = C_{\text{total Ca}} - C_{\text{Ca}^{++}} \quad (7)$$

and the citrate ion concentration is

$$C_{\text{Cit}^{---}} = C_{\text{total Cit}} - C_{\text{CaCit}^-} \quad (8)$$

assuming that calcium and citrate reacts according to scheme (1) and that the pH of the solution is such that the citric acid is completely ionized.

In pure water the solubility of calcium iodate is 0.00784 m at 25°C., and the solubility increases with increasing ionic strength. Since calcium citrate is only fairly soluble and it is desirable to have the molar concentration of calcium and citrate of the same order of magnitude, the concentration of calcium attained by simply saturating a solution of sodium citrate with calcium iodate is too great. To secure a concentration of calcium of the desired magnitude, potassium iodate was added to the solutions in order to reduce the solubility of calcium iodate. The solutions furthermore held a certain amount of sodium chloride to reduce the medium effect of varying concentrations of calcium and citrate.

Experimental.

The solutions were made up from standard solutions of sodium chloride (Merck. Zur Analyse dried) potassium iodate (Merck. Zur Analyse) and sodium citrate (Citric acid nach Sørensen + sodium hydroxide).

Calcium iodate was precipitated from a solution of potassium iodate with calcium chloride. The precipitate was very thoroughly washed with water and dried at room temperature and each new sample was checked.

The solutions were saturated with calcium iodate by shaking over night in a thermostat at 25°C., and samples were withdrawn for analysis of calcium (KRAMER and TISDALL (13)) and iodate (addition of potassium iodide and hydrochloric acid and titration with sodium thiosulfate).

As already pointed out potassium iodate was added to lessen the solubility of calcium iodate. In some experiments the concentration of calcium was only $1/10$ — $1/20$ of that of iodate. Since in the work of KILDE (12), these extreme

Table I.
Solubility Product of Calcium Iodate.

NaCl	KIO ₃	IO ₃ found	Ca found	μ	L 10 ⁶	L _{calc} 10 ⁶
M	M	M	M			
0.0450	0.0450	0.0482	0.00163	0.0949	3.80	3.76
0.0400	0.0500	0.0527	0.00138	0.0941	3.82	3.74
0.0650	0.0450	0.0486	0.00176	0.1153	4.16	4.20
0.0550	0.0550	0.0578	0.00130	0.1140	4.35	4.17
0.0850	0.0450	0.0489	0.00190	0.1357	4.55	4.61
0.0800	0.0500	0.0530	0.00161	0.1347	4.53	4.59
0.0750	0.0550	0.0574	0.00138	0.1339	4.56	4.58
0.0700	0.0600	0.0621	0.00120	0.1334	4.63	4.57
0.1150	0.0450	0.0496	0.00209	0.1665	5.14	5.16
0.1100	0.0500	0.0536	0.00181	0.1654	5.20	5.15
0.1050	0.0550	0.0578	0.00153	0.1645	5.12	5.13
0.1000	0.0600	0.0624	0.00127	0.1637	4.93	5.12

concentrations of calcium and iodate have not been used, we found it desirable to ascertain whether the solubility product was not influenced hereby. In table I, L is the solubility product found by us. L_{cal} is the solubility product computed by means of (3) and (4) putting $L_0 = 0.736 \cdot 10^{-6}$. It will be seen that there is perfect agreement, and that potassium iodate has no specific effect. By later experiments it has proved somewhat difficult to attain a constant preparation of calcium iodate, the solubility products for some preparations being about 2—6 per cent above those calculated. This seems to be due to minor impurities.

Continued experiments are being made in order to solve this problem.

The solubility of calcium iodate was then determined in solutions containing sodium citrate. The solubility was much greater than the solubility of calcium iodate in mixtures of sodium chloride of the same ionic strength. In table II Ca_{obs} is the total calcium concentration found, Ca_{cal} is the calcium ion concentration calculated by means of (3),

Table II.

Observed and Calculated Concentration of Calcium in
Solutions Containing Sodium Citrate.

Na_3Cit 0.005 m. Ionic Strength 0.1341–0.1396.

Ca_{obs} M	0.00639	0.00576	0.00550	0.00516	0.00492	0.00465
Ca_{cal} M	0.00258	0.00211	0.00179	0.00148	0.00129	0.00112

Table III.

Observed and Calculated Concentration of Calcium in
Solutions Containing Potassium Cobalticyanide.

$\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$ 0.005 m. Ionic Strength 0.1247–0.1308.

Ca_{obs} M	0.00347	0.00293	0.00208	0.00171	0.00147
Ca_{cal} M	0.00344	0.00294	0.00210	0.00177	0.00151

Table IV.
Dissociation Constant of Calcium Citrate.

a. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.07 \text{ m}$, $\text{Na}_3\text{Cit} 0.005 \text{ m}$, $\mu = 0.0917-0.0926$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}}$
IO_3	Ca	Ca^{++}	CaCit^-	Cit^{---}		
M	M	M	M	M		
0.0556	0.00513	0.00120	0.00393	0.00107	3.27	3.48
0.0599	0.00482	0.00103	0.00379	0.00121	3.28	3.48
0.0643	0.00455	0.00089	0.00366	0.00134	3.29	3.48
0.0695	0.00423	0.00077	0.00346	0.00154	3.43	3.46
0.0686	0.00438	0.00078	0.00360	0.00140	3.08	3.51
Mean value...					3.27	3.48

b. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.09 \text{ m}$, $\text{Na}_3\text{Cit} 0.005 \text{ m}$, $\mu = 0.1122-0.1150$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}}$
IO_3	Ca	Ca^{++}	CaCit^-	Cit^{---}		
M	M	M	M	M		
0.0433	0.00639	0.00224	0.00415	0.00085	4.59	3.34
0.0431	0.00635	0.00225	0.00410	0.00090	4.94	3.31
0.0476	0.00576	0.00185	0.00391	0.00109	5.15	3.29
0.0478	0.00589	0.00182	0.00407	0.00093	4.16	3.38
0.0512	0.00550	0.00156	0.00394	0.00106	4.20	3.38
0.0558	0.00516	0.00133	0.00383	0.00117	4.06	3.39
0.0554	0.00520	0.00135	0.00385	0.00115	4.04	3.39
0.0599	0.00492	0.00115	0.00377	0.00123	3.76	3.42
0.0598	0.00481	0.00116	0.00365	0.00135	4.29	3.37
0.0643	0.00465	0.00100	0.00365	0.00135	3.70	3.43
0.0642	0.00455	0.00100	0.00355	0.00145	4.08	3.39
0.0643	0.00452	0.00100	0.00352	0.00148	4.21	3.38
Mean value...					4.26	3.37

c. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.110 \text{ m}$. $\text{Na}_3\text{Cit} 0.005 \text{ m}$, $\mu = 0.1323-0.1333$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}}$
IO_3	Ca	Ca^{++}	CaCit^-	Cit^{---}		
M	M	M	M	M		
0.0560	0.00529	0.00145	0.00384	0.00116	4.40	3.36
0.0598	0.00497	0.00127	0.00370	0.00130	4.46	3.35
0.0644	0.00468	0.00110	0.00358	0.00142	4.36	3.36
0.0692	0.00436	0.00095	0.00341	0.00159	*4.44	3.35
0.0682	0.00437	0.00097	0.00340	0.00160	4.58	3.34
Mean value...					4.45	3.35

Table IV.
(Continued).

d. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.125 \text{ m}$, $\text{Na}_3\text{Cit} 0.005 \text{ m}$, $\mu = 0.1480-0.1491$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}^-} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}^-}$
IO_3 M	Ca M	Ca^{++} M	CaCit^- M	Cit^{---} M		
0.0558	0.00520	0.00156	0.00364	0.00136	5.83	3.23
0.0556	0.00547	9.00156	0.00391	0.00109	4.35	3.36
0.0598	0.00500	0.00135	0.00365	0.00135	5.00	3.30
0.0593	0.00494	0.00138	0.00356	0.00144	5.59	3.25
0.0642	0.00460	0.00117	0.00343	0.00157	5.36	3.27
0.0637	0.00456	0.00120	0.00336	0.00164	5.86	3.23
0.0690	0.00443	0.00102	0.00341	0.00159	4.76	3.32
0.0682	0.00432	0.00104	0.00328	0.00172	5.46	3.26
Mean value...					5.25	3.28

e. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.140 \text{ m}$, $\text{Na}_3\text{Cit} 0.005 \text{ m}$, $\mu = 0.1637-0.1654$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}^-} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}^-}$
IO_3 M	Ca M	Ca^{++} M	CaCit^- M	Cit^{---} M		
0.0568	0.00508	0.00160	0.00348	0.00152	6.99	3.16
0.0558	0.00522	0.00166	0.00356	0.00144	6.72	3.17
0.0603	0.00496	0.00142	0.00354	0.00146	5.86	3.23
0.0641	0.00460	0.00125	0.00335	0.00165	6.15	3.21
0.0690	0.00429	0.00108	0.00321	0.00179	6.02	3.22
0.0683	0.00437	0.00110	0.00327	0.00173	5.82	3.23
Mean value...					6.22	3.21

f. $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.094-0.102 \text{ m}$, $\text{Na}_3\text{Cit} 0.002-0.004 \text{ m}$,
 $\mu = 0.1130-0.1143$.

observed		calculated			$K_{\text{CaCit}^-} \cdot 10^4$	$\text{p}K_{\text{CaCit}^-}$
IO_3 M	Ca M	Ca^{++} M	CaCit^- M	Cit^{---} M		
0.0583	0.00421	0.00122	0.00299	0.00101	4.12	3.38
0.0575	0.00341	0.00126	0.00215	0.00082	4.81	3.32
0.0559	0.00290	0.00134	0.00156	0.00044	3.78	3.42
0.0627	0.00396	0.00106	0.00290	0.00110	4.02	3.39
0.0619	0.00321	0.00108	0.00213	0.00084	4.26	3.37
0.0600	0.00252	0.00115	0.00137	0.00063	5.29	3.28
Mean value...					4.36	3.36

(4) and (6) μ being computed assuming that both calcium and citrate are fully ionized. The observed calcium is much greater than the one calculated, which means that citrate reduces the activity of calcium. This may be either a general effect of the trivalent ion or a specific effect of the citrate ion. Some experiments were consequently carried out replacing citrate by another trivalent ion, here the cobalticyanid ion. In table III observed and calculated Ca is given as above. The difference throughout is within the experimental error. It is thus a specific effect of the citrate ion and the most likely explanation is that a combination is formed.

The experiments of Table II were then recalculated under the assumption that one mol of calcium combines with one mol of citrate according to scheme (1) and the dissociation constant (2) was then determined. μ was computed assuming that the complex acted as a monovalent ion. In Table IV the experiments of Table II (Table IV b) are given together with a series of other experiments.

At constant ionic strength the constancy of the dissociation constant is fairly good considering the effect of the experimental error. The error of the iodate analysis does not exceed 2 per mil but the error of the calcium analysis may amount to 2 per cent. C_{CaCit^-} is computed from (7) and $C_{Cit^{3-}}$ from (8). An error of 2 per cent in total calcium will count heavily on $C_{Cit^{3-}}$, and when the values are inserted into (2) the errors will operate in the same direction on K. For example, in Table IV b: $m IO_3 = 0.0431$, $m Ca = 0.00635$. If $m Ca$ is 2 per cent too low, we get $m Ca^{++} = 0.00225$, $m CaCit^- = 0.00422$, $m Cit^{3-} = 0.00078$ and $K = 4.16 \cdot 10^{-4}$ instead of $4.94 \cdot 10^{-4}$. An error in total calcium of 2 per cent here means an error of 20 per cent in K.

In order to see whether the variation of the dissociation

constant with varying ionic strength is within reasonable limits the activity dissociation constant

$$\begin{aligned} K_{0\text{CaCit}^-} &= \frac{A_{\text{Ca}^{++}} \cdot A_{\text{Cit}^{---}}}{A_{\text{CaCit}^-}} = \frac{C_{\text{Ca}^{++}} \cdot f_{\text{Ca}^{++}} \cdot C_{\text{Cit}^{---}} \cdot f_{\text{Cit}^{---}}}{f_{\text{CaCit}^-} \cdot C_{\text{CaCit}^-}} = \\ &= K_{\text{CaCit}^-} \frac{f_{\text{Ca}^{++}} \cdot f_{\text{Cit}^{---}}}{f_{\text{CaCit}^-}} \end{aligned}$$

or

$$\text{p}K_{0\text{CaCit}^-} = \text{p}K_{\text{CaCit}^-} + \text{p}f_{\text{Ca}^{++}} + \text{p}f_{\text{Cit}^{---}} - \text{p}f_{\text{CaCit}^-}$$

was computed. The following values for the negative logarithms of the activity coefficients were adopted:

$$\text{p}f_{\text{Ca}^{++}} = 2.016 \sqrt{\mu} - 1.58 \mu$$

$$\text{p}f_{\text{Cit}^{---}} = 4.536 \sqrt{\mu} - 3.89 \mu$$

$$\text{p}f_{\text{CaCit}^-} = 0.504 \sqrt{\mu} - 0.41 \mu$$

$\text{p}f_{\text{Ca}^{++}}$ was taken from KILDE (12), $\text{p}f_{\text{Cit}^{---}}$ from BJERRUM and UNMACK (14). For the activity coefficient of the complex, no value was known, but as an approximate value the activity coefficient of the primary citrate ion determined by BJERRUM and UNMACK (14) was used. Since the variation in ionic strength is very limited and since it is not known how great an error is committed by substituting the activity coefficient of the primary citrate ion for that of the complex, the $\text{p}K_0$ values of Table V can only be regarded as

Table V.

μ	$\text{p}K_{\text{CaCit}^-}$	$\text{p}K_{0\text{CaCit}^-}$
0.0920	3.48	4.84
0.1145	3.37	4.83
0.1328	3.35	4.88
0.1485	3.28	4.85
0.1645	3.21	4.83
	Mean value...	4.85

a rough estimate, but its constancy seems to indicate that no great error has been committed.

The combination of calcium and citrate was then determined at different pH within a range where citric acid is only partly dissociated.

The solutions were made up from sodium chloride, potassium iodate and citric acid and adjusted to different pH with sodium hydroxide. After being saturated with calcium iodate, the solution showed great changes in pH. The hydrogen ion concentration could not be measured with a hydrogen electrode on account of the iodate and a colorimetric method was adopted. The hydrogen ion concentration of the original solution before saturating with calcium iodate was calculated by means of BJERRUM and UNMACKS (14) values for the dissociation constants of citric acid. An indicator was added to these solutions and to the solutions after saturating with calcium iodate and the colors were compared. In this way the solutions of known and unknown hydrogen ion concentration were as nearly identical in composition as possible; but even with great care the error in pH amounts to 0.03 (pH means here negative logarithm of the hydrogen ion concentration).

The results of these experiments are put down in Table VI. The concentration of calcium ions, calcium-citrate complex, and free citrate was calculated in the usual manner. By means of the found pH and the dissociation constants of citric acid (BJERRUM and UNMACK (14)), the amounts of the free citrate present as undissociated citric acid and as the three ions were calculated. From the concentration of calcium ions and tertiary citrate ions, it is now possible to calculate the concentration of the complex formed by these ions using the above value for the dissociation constant.

Table VI.

Combination of secondary citrate ions and calcium ions
 $\text{NaCl} + \text{KIO}_3 = 0.0900 \text{ m}$, Citrate 0.005 m , $\mu = 0.1015 - 0.1110$.

IO_3 M	Ca M	pH	Ca^{++} M	Ca Complex M	HCit ⁻ M	Cit ⁻ M	CaCit ⁻ M	CaCitH M	$\text{K}_{\text{CaCitH}} 10^3$
0.0448	0.00235	3.60	0.00195	0.00040	0.00061	0.000006	0.00003	0.00037	3.2
0.0447	0.00237	3.78	0.00198	0.00038	0.00090	0.000012	0.00006	0.00032	5.6
0.0451	0.00258	3.88	0.00195	0.00063	0.00106	0.000018	0.00009	0.00054	3.8
0.0452	0.00262	4.00	0.00194	0.00068	0.00131	0.000029	0.00015	0.00053	4.8
0.0455	0.00273	4.10	0.00193	0.00080	0.00149	0.000041	0.00021	0.00059	4.9
0.0457	0.00285	4.20	0.00192	0.00093	0.00167	0.000058	0.00029	0.00064	5.0
0.0459	0.00298	4.33	0.00190	0.00108	0.00188	0.000088	0.00043	0.00065	5.5
0.0463	0.00308	4.42	0.00188	0.00120	0.00200	0.000115	0.00055	0.00065	5.8
0.0466	0.00322	4.50	0.00186	0.00136	0.00208	0.000141	0.00066	0.00070	5.5
0.0468	0.00334	4.60	0.00185	0.00149	0.00215	0.000187	0.00088	0.00061	6.5
0.0469	0.00362	4.70	0.00185	0.00177	0.00210	0.000230	0.00106	0.00071	5.5
0.0473	0.00384	4.76	0.00182	0.00202	0.00199	0.000252	0.00115	0.00087	4.2
0.0478	0.00405	4.92	0.00179	0.00226	0.00190	0.000346	0.00153	0.00073	4.7
0.0484	0.00423	5.05	0.00175	0.00248	0.00176	0.00043	0.00185	0.00063	4.9
0.0487	0.00458	5.20	0.00173	0.00275	0.00152	0.00053	0.00224	0.00051	5.2
								Mean value...	5.0

It will be seen that this complex does not account for all the calcium bound there is a surplus of combined calcium. This is assumed to be bound to the secondary citrate ion according to the scheme



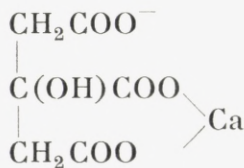
The concentration of this complex is to be found in the last column but one of Table VI and the dissociation constant

$$K_{\text{CaCitH}} = \frac{C_{\text{Ca}^{++}} \cdot C_{\text{CitH}^{--}}}{C_{\text{CaCitH}}}$$

is given in the last column of the table. Since only a small amount of calcium is bound by the secondary ion and the errors in the different estimations sum up in the estimation of K_{CaCitH} no greater accuracy could be expected.

Discussion.

The above findings are in perfect agreement with the findings of HASTINGS, McLEAN, EICHELBERGER, HALL and DA COSTA (10). They find $\text{p}K_{\text{CaCit}^-} = 3.22$ at $22-23^\circ$ and $\mu = 0.155-0.163$ compared with 3.28 at $\mu = 0.149$ and 3.21 at $\mu = 0.165$ both at 25° . But as to the formula proposed for the calcium complex



this formula does not emphasize the role that certainly is to be ascribed to the hydroxyl group of citric acid in binding calcium.

In support of the view that the hydroxyl group is engaged in binding the calcium, some findings on tricarballic acid can be stated. Tricarballic acid only differs from the citric acid in having a hydrogen atom in the place of hydroxyl group.

The experiments were carried out in the same manner as those with citric acid. The results of the experiments are to be found in Table VII. It will be seen that though there is a marked difference between observed and calculated calcium, this difference is not nearly as great as in the experiments with sodium citrate (Table II). The dissociation constant of the complex of calcium and the tricarballic ion is consequently much greater than that of the citrate complex, about 50 times as large.

Table VII.

Observed and calculated concentrations of calcium in solutions of the sodium salt of tricarballic acid.

	H ₅ C ₆ O ₆ Na ₃ 0.005 m. Ionic strength 0.1279—0.1232.				
m Ca _{obs}	0.00401	0.00336	0.00245	0.00211	0.00185
m Ca _{cal}	0.00327	0.00273	0.00195	0.00168	0.00144
K _{CaH₅C₆O⁻} · 10 ²	1.87	1.89	1.79	1.78	1.61

It would be of great interest to go into further details regarding the constitution of the calcium citrate complex; but with what is known at present, it seems too hazardous to venture on proposing any formula.

The above quoted investigators likewise determined the dissociation constant of the complexes formed by citrate ions and magnesium and strontium ions and found pK_{MgCit^-} 3.22 and pK_{SrCit^-} 2.70. As a matter of comparison, the dissociation constant of the complex formed by barium and citrate was determined. The method was analogous to that used

for calcium. Only a few experiments were carried out, but the pK_{BaCit^-} was found to be approximately 2.69 at $\mu = 0.165$, i. e. nearly the same as that found for strontium citrate.

Summary.

1) In accordance with the hypothesis of HASTINGS, McLEAN, EICHELBERGER, HALL and DA COSTA (10), it was assumed that calcium ions react with citrate ions according to the scheme



2) The experimental findings are in agreement with this scheme of reaction and the dissociation constant

$$K_{\text{CaCit}^-} = \frac{C_{\text{Ca}^{++}} \cdot C_{\text{Cit}^-}}{C_{\text{CaCit}^-}}$$

was determined at 25° and different ionic strength. At $\mu = 0.165$ pK is found to be 3.21 compared with 3.22 found by the above investigators at $22-23^\circ$ and $\mu = 0.155-0.163$.

3) The pK at zero salt concentration was estimated to 4.85.

4) It was found that calcium also combines with the secondary citrate ion,



and the pK for this reaction was determined to 2.3 at $\mu = 0.110$.

From Universitetets Biokemiske Institut, Copenhagen, Denmark.

REFERENCES

- 1) SABBATANI, L. Arch. ital. biol. 36:397 (1901).
- 2) SHEAR, M. J. and KRAMER, B. J. Biol. Chem. 79:181 (1928).
- 3) SHEAR, M. J., KRAMER, B. and RESNIKOFF, L. J. Biol. Chem. 83:721 (1929).
- 4) WILEY, W. J. Biochem. J. 24:856 (1930).
- 5) MULLI, K. and STANDENATH, FR. Arch. exp. Path. u. Pharmacol. 169:604 (1933).
- 6) HASTINGS, A. B., MURRAY, C. D. and SENDROY, J. JR. J. Biol. Chem. 71:723 (1927).
- 7) CLARK, A. J., PERCIVAL, G. H. and STEWART, C. P. J. Physiol. 66:346 (1928).
- 8) STEWART, C. P. and PERCIVAL, G. H. Biochem. J. 22:559 (1928).
- 9) SHELLING, D. H. and MARSLOW, H. L. J. Biol. Chem. 78:661 (1928).
- 10) HASTINGS, A. B., McLEAN, F. C., EICHELBERGER, L., HALL, J. L. and DA COSTA, E. J. Biol. Chem. 107:351 (1934).
- 11) McLEAN, F. C. and HASTINGS, A. B. J. Biol. Chem. 107:337 (1934).
- 12) KILDE, G. Z. Anorg. Chem. 218:113 (1934).
- 13) KRAMER, B. and TISDALL, F. F. J. Biol. Chem. 48:223 (1921).
- 14) BJERRUM, N. and UNMACK, A. Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Mat. Fys. Med. IX. 1 (1929).

